Université Abdelmalek Essaâdi — **Année universitaire : 2019/2020**
Faculté des Sciences de Tétouan — **Master M.A.F.**
Département de Mathématiques — **Semestre 2**

T.D. de Méthodes de Monté-Carlo
Corrigés de la série n° 4

Exercice 1 :

1. Soit à approximer par la méthode de Monte-Carlo l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^2 e^{-x^2} dx$$

Il convient au préalable d'écrire I comme une espérance mathématique en se donnant une densité de probabilité f sur $[0, 2]$ facile à simuler. On choisit pour cet exemlpe la densité de la loi uniforme continue sur $[0, 2]$ qui est la plus simple, soit : $f(x) = \frac{1}{2}\mathbb{I}_{[0,2]}$. D'où, on déduit directement :

$$I = \int_0^2 2e^{-x^2} \frac{1}{2} dx$$

Soit,

$$I = E\left(2e^{-X^2}\right) \quad \text{où} \quad X \sim \mathcal{U}(0, 2)$$

et donc

$$\hat{I}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2e^{-X_i^2}$$

les X_i étant des valeurs simulées de $X \sim \mathcal{U}(0, 2)$, $\hat{I}_n$ définit l'approximation de I par la méthode de Monte-Carlo. En conséquence pour trouver cette approximation, on peut procéder comme suit (n étant donnée) :
• Générer n valeurs indépendantes $U_1, U_2, \cdots, U_n \sim \mathcal{U}(0, 1)$
• Calculer $X_1, X_2, \cdots, X_n$ par la méthode d'inversion, soit $X_i = 2U_i$.
• Calculer $g(X_i) = 2e^{-X_i^2}$ pour $i = 1$ à n et leur moyenne arithmétique simple pour trouver $\hat{I}_n$.

2. On peut considérer $\hat{I}_n$ comme un estimateur calculé sur léchantillon de variables $X_1, X_2, \cdots, X_n$ qui est un échantillon i.i.d qu'on suppose posséder une espérance mathématique m et une variance σ^2.On peut alors chercher si $\hat{I}_n$ possède les proporiétés classiques d'un estimateur. Au préalable, on donne l'expression de la variance de $\hat{I}_n$ dont l'estimation fournit une mesure de la précision de cette approximation.
Précision de $\hat{I}_n$:
Par définition, on a :

$$Var(\hat{I}_n) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{g(X_i)}{f(X_i)}\right)$$

$$= Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i)\right) \quad \text{avec} \quad h(X_i) = \frac{g(X_i)}{f(X_i)}$$

Comme les $h(X_i)$ sont i.i.d., il s'ensuit que :

$$Var(\hat{I}_n) = \frac{1}{n} Var(h(X))$$

$$\text{ou encore } \; Var(\hat{I}_n) = \frac{1}{n} E(h^2(X)) - E^2(h(X))$$

$$\text{Soit enfin : } \; Var(\hat{I}_n) = \frac{1}{n} E(h^2(X)) - I^2$$

Cette quantité dépendant de I ne peut pas être donc déterminée. On peut cependant l'approximer. En effet, on peut approximer I^2 par $\hat{I}_n^2$. Quant à $J = E(h^2(X))$, on peut, comme on l'a fait pour $I = E(h(X))$, utiliser la méthode de Monte-Carlo pour l'approximer, soit $\hat{J}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h^2(X_i)$, où les X_i sont des valeurs simulées de X selon f.

Une approximation de $Var(\hat{I}_n)$ peut être aussi donnée par :

$$\widehat{Var(\hat{I}_n)} = \frac{1}{n}\left(\hat{J}_n - \hat{I}_n^2\right)$$

qui fournit une estimation de la précision de l'approximation de la méthode de Monte-Carlo.

3. **Absence de biais :**
L'estimateur $\hat{I}_n$ est sans biais. En effet :

$$E(\hat{I}_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h(X_i)\right)$$

soit, compte tenu des propriétés de l'opérateur "espérance",

$$E(\hat{I}_n) = E\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} h(X_i)\right)$$

Comme les X_i sont indépendantes et de même loi, les $h(X_i)$ le sont aussi, d'où

$$E(\hat{I}_n) = E(h(X)) = I$$

où X est une v.a. de même loi que les X_i prouvant ainsi que $\hat{I}_n$ est un estimateur sans biais de I.

4. **Convergence :**
L'estimateur $\hat{I}_n$ est par construction convergent en probabilité. En effet, étant construit à partir de la loi des grands nombres, l'on a aussi :

$$P(\lim \hat{I}_n) = I$$

On note aussi, qu'il est convergent en moyenne quadratique. L'on a, en effet, à la fois $E(\hat{I}_n) = I$ et $Var(\hat{I}_n) \to 0$

5. **Normalité asymptotique :**
L'estimateur $\hat{I}_n$ se présente comme une moyenne arithmétique. On sait alors d'après le théorème central limite, que

$$\frac{\hat{I}_n - I}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{où} \quad \sigma^2 = Var(h(X))$$

converge en loi vers la loi normale centrée réduite. A noter en outre que cette proposition reste vraie en changeant σ^2 par $\hat{\sigma}^2 = \widehat{Var}(h(X))$. On peut en conséquence énoncer que :

$$\frac{\hat{I}_n - I}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

6. On a :

$$\frac{(\hat{I}_n - I)}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1), \quad \text{quand} \;\; n \to \infty$$

avec $\sigma^2 < \infty$ est la variance de Z.
ce qui permet de définir un intervalle de confiance (asymptotique) de I de niveau égal à $(1-\alpha)\%$:

$$\left[\hat{I}_n - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}, \hat{I}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}\right]$$

En effet, on a :

$$P\left(\hat{I}_n - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} \leqslant I \leqslant \hat{I}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}\right) \approx 1-\alpha$$

où z_a désigne le quantile d'ordre a de la loi normale centrée réduite.
Si F est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, $z_\alpha$représente le quantile d'ordre α, i.e. tel que $F(z_\alpha) = 1-\alpha$. De la proposition précédente, on peut établir un intervalle de confiance I :

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\hat{I}_n - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} \leqslant I \leqslant \hat{I}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha,$$

$\hat{\sigma}_n^2$ un estimateur sans biais de la variance de Z :

$$\hat{\sigma}_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{g(X_i)}{f_X(X_i)} - \hat{I}_n\right)^2$$

7. **Vitesse de convergence :**
La méthode de Monte-Carlo présente une vitesse de convergence relativement lente. En effet, du fait de la normalité asymptotique, on a :

$$|\hat{I}_n - I| < z_{1-(\frac{\alpha}{2})}\sigma/\sqrt{n}$$

avec une probabilité égale à $(1-\alpha)$. La quantité $z_{1-(\frac{\alpha}{2})}\sigma/\sqrt{n}$ définit ainsi l'erreur d'approximation maximale de la méthode de Monte-Carlo. Cette erreur converge vers 0 quand n tend vers l'infini. Cette convergence est, cependant, assez lente, de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$, puisque par exemple en multipliant le nombre d'observations par 100, l'erreur maximale d'approximation se trouve seulement divisée par 10.

Exercice 2 :

1. $I = \int_0^1 \cos(x^3)\exp(-x)dx$
<u>Première méthode :</u>
Nous écrivons par exemple,

$$I = \int_0^1 \cos(x^3)e^{-x}dx = \int_{\mathbb{R}} \cos(x^3)e^{-x}\mathbb{I}_{[0,1]}(x)dx$$

Donc $I = E\left(\cos(U^3)e^{-U}\right)$ avec $U \sim \mathcal{U}([0,1])$.
Donc, si $U_1, U_2, \cdots$ sont i.i.d. $\sim \mathcal{U}([0,1])$, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos(U_i^3)e^{-U_i} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} I$$

<u>Deuxième méthode :</u>

$$I = \int_{\mathbb{R}} \cos(x^3)\mathbb{I}_{[0,1]}(x) \times \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)e^{-x}dx$$

Donc $I = E\left(\cos(X^3)\mathbb{I}_{[0,1]}(X)\right)$ avec $X \sim \mathcal{E}xp(1)$.
Donc, si $X_1, X_2, \cdots$ sont i.i.d. $\sim \mathcal{E}xp(1)$, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos(X_i^3)\mathbb{I}_{[0,1]}(X_i) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} I$$

2. $J = \int_0^{+\infty} \sin(x^4)\exp(-2x)\exp(-\frac{x^2}{2})dx$
   <u>Première méthode :</u>

$$J = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2\pi}\sin(x^4)e^{-2x}\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx$$

$$J = E\left(\sqrt{2\pi}\sin(Z^4)e^{-2Z}\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(Z)\right) \quad \text{avec} \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

   Si, nous tirons $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ i.i.d. de même loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{2\pi}\sin(Z_i^4)e^{-2Z_i}\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(Z_i) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} J$$

   <u>Deuxième méthode :</u>

$$J = \int_{\mathbb{R}} \sin(x^4)e^{-x^2/2}\frac{1}{2} \times 2\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)e^{-2x}dx$$

$$J = E\left(\sin(Y^4)e^{-Y^2/2}\frac{1}{2}\right) \quad \text{avec} \quad Y \sim \mathcal{E}xp(2)$$

   Si, nous tirons $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ i.i.d. de même loi $\mathcal{E}xp(2)$, alors

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} \sin(Y_i^4)e^{-Y_i^2/2} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} J$$

3. $K = \int_0^1 \ln(1+x^2)\exp(-x^2)dx$
   <u>Première méthode :</u>

$$K = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\pi}\ln(1+x^2)\mathbb{I}_{[0,1]}(x)\frac{\exp^{\left(-\frac{x^2}{2(1/2)}\right)}}{\sqrt{2\pi(1/2)}}dx$$

$$K = E\left(\sqrt{\pi}\ln(1+Z^2)\mathbb{I}_{[0,1]}(Z)\right) \quad \text{avec} \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1/2)$$

Si, nous tirons $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ i.i.d. de même loi $\mathcal{N}(0, 1/2)$, alors

$$\frac{\sqrt{\pi}}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+Z_i^2)\mathbb{I}_{[0,1]}(Z_i) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} K$$

Deuxième méthode :

$$K = \int_{\mathbb{R}} \ln(1+x^2)e^{-x^2} \times \mathbb{I}_{[0,1]}(x)dx$$
$$K = E(\ln(1+X^2)e^{-X^2}) \;\text{ avec }\; X \sim \mathcal{U}([0,1])$$

Si, nous tirons $X_1, X_2, \cdots, X_n$ i.i.d. de même loi $\mathcal{U}([0,1])$, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+X_i^2)e^{-X_i^2} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} K$$

4. $L = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}e^{-x}dx$
   Première méthode :
   Soient $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des variables i.i.d. de loi $\mathcal{E}xp(1)$.
   Nous remarquons que la fonction $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$ (parce que l'équivalent de $\sin(x)$ en 0 est x).
   Donc $E\left(\left|\frac{\sin(X_1)}{\sqrt{X_1}}\right|\right)$ est finie.
   Donc, par la loi des grands nombres,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin(X_1)}{\sqrt{X_1}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} E\left(\frac{\sin(X_1)}{\sqrt{X_1}}\right) = L$$

   Deuxième méthode :
   Nous pouvons aussi écrire :

$$L = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}2e^{-\frac{x}{2}} \times \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx$$

   Soient $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ des variables i.i.d. de loi $\mathcal{E}xp(\frac{1}{2})$.
   Nous remarquons que la fonction $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}2e^{-\frac{x}{2}}$ est bornée (comme produit de deux fonctions bornées).
   Donc $E\left(\left|\frac{\sin(Y_1)}{\sqrt{Y_1}}2e^{-\frac{Y_1}{2}}\right|\right)$ est finie.
   Donc, par la loi des grands nombres,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin(Y_i)}{\sqrt{Y_i}}2e^{-\frac{Y_i}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} E\left(\frac{\sin(Y_1)}{\sqrt{Y_1}}2e^{-\frac{Y_1}{2}}\right) = L$$

5. $M = \int_0^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x}dx$
   Première méthode :

$$M = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{x}e^{-x}\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x) \times \mathbb{I}_{[0,1]}(x)dx$$
$$= E(\sqrt{X}e^{-X}\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(X)) \quad \text{avec} \quad X \sim \mathcal{U}([0,1])$$

La fonction $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{x}e^{-x}$ étant bornée, $M = E(\sqrt{X}e^{-X}\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(X))$ est finie.
Donc, si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont i.i.d. $\sim \mathcal{U}([0,1])$, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{X_i}e^{-X_i}\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(X_i) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} M \,\text{(par la loi des grands nombres)}$$

<u>Deuxième méthode :</u>

$$M = \int_0^{+\infty} 2\sqrt{y}e^{-\frac{y}{2}} \times \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy$$

$$M = E(2\sqrt{Y}e^{-\frac{Y}{2}})\,\text{avec} \quad Y \sim \mathcal{E}xp(\frac{1}{2})$$

La fonction $y \in \mathbb{R}^+ \mapsto 2\sqrt{y}e^{-\frac{y}{2}}$ étant bornée, $M = E(2\sqrt{Y}e^{-\frac{Y}{2}})$ est finie.
Donc, si $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ sont i.i.d. $\sim \mathcal{E}xp(\frac{1}{2})$, alors

$$\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{Y_i}e^{-\frac{Y_i}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} M \,\text{(par la loi des grands nombres)}$$

6. $N = \int_0^1 \sin(\sqrt{x})dx$
   Si on prend $X_1, X_2, \cdots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0,1])$, alors $E(\sin(\sqrt{X_1})) = N$ (on a bien $E(|\sin(\sqrt{X_1})|) < +\infty$ puisque la variable intégrée est bornée par 1).
   Donc, par la loi des grands nombres,

$$N_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin(\sqrt{X_k}) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} N$$

Exercice 3 :
Soient $X, X_1, X_2, \cdots$ des variables i.i.d. uniformes dans $C = [-1,1] \times [-1,1]$ (sous-endentu : $X = (U_1, U_2)$ avec U_1 et U_2 indépendantes et de loi uniforme sur $[-1,1]$ toutes les deux). Soit D le disque (dans $\mathbb{R}^2$) de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

1. Si on tire U_1, U_2 indépendantes et uniformes dans $[-1,1]$, alors (U_1, U_2) est de loi uniforme dans C. Si on tire $((U_1^{(n)}, U_2^{(n)}))$ i.i.d. tous de même loi que (U_1, U_2), alors, par la loi des grands nombres (les variables $\mathbb{I}_{\dots}$ sont bornées donc les hypothèses sont bien vérifiées) :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{I}_{(U_1^{(k)},U_2^{(k)})\in D} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} E(\mathbb{I}_{X\in D}).$$

2. Par la loi des grands nombres (qui s'applique pour la même raison que ci-dessus)

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\mathbb{I}_{(U_1^{(2k)},U_2^{(2k)})\in D} - \mathbb{I}_{(U_1^{(2k-1)},U_2^{(2k-1)})\in D}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} Var(X).$$

Exercice 4 :
Appliquons différentes méthodes de réduction de la variance pour estimer $P(X > 3)$, où X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
1°) Échantillonnage préférentiel :
On pose $I = P(X > 3) = E(\mathbb{I}_{(X>3)}) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{(X>3)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ avec $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Si nous tirons $X_1, X_2, \cdots, X_n$ i.i.d. de même loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors, par la loi des grands nombres,

$$\hat{I}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(X_i>3)} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} I,$$

On considère une v.a. $T \sim \mathcal{E}xp(1)$ et soit $Y = 3+T$, la densité de Y est $g(y) = e^{-(y-3)}\mathbb{I}_{(Y>3)}$. Notons f la densité de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, l'estimateur de I par échantillonnage préférentiel avec g comme densité d'échantillonnage s'écrit donc

$$\tilde{I}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{f(Y_i)}{g(Y_i)}\mathbb{I}_{(Y_i>3)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(Y_i - 3 - \frac{Y_i^2}{2}\right)$$

2°) Variable antithétique :
Rappelons que dans le cas Normal $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$, on peut prendre comme variable antithétique $2\mu - X$, qui est aussi Normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$, mais corrélée négativement avec la variable X.
Dans ce cas $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, on prend comme variable antithétique $-X$.
D'où, on peut écrire l'approximation par la méthode de la variable antithétique :

$$\tilde{I}_n = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} \left(\mathbb{I}_{(X_i>3)} + \mathbb{I}_{(-X_i>3)}\right)$$

où les X_i sont des valeurs simulées selon la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
On peut alors montrer que $Var(\tilde{I}) \leqslant Var(\hat{I})$.
$Var(\tilde{I}) = \frac{1}{4n}\left(Var(\mathbb{I}_{(X_i>3)}) + Var(\mathbb{I}_{(-X_i>3)})\right) + 2Cov(\mathbb{I}_{(X_i>3)}, \mathbb{I}_{(-X_i>3)})$
Puisque $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$, la variable $-X_i$ suit également la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Les variables $\mathbb{I}_{(X_i>3)}$ et $\mathbb{I}_{(-X_i>3)}$ suivent alors la même loi et donc $Var(\mathbb{I}_{(X_i>3)}) = Var(\mathbb{I}_{(-X_i>3)})$. D'autre part, on sait que $Cov(\mathbb{I}_{(X_i>3)}, \mathbb{I}_{(-X_i>3)}) \leqslant \sqrt{Var(\mathbb{I}_{(X_i>3)})Var(\mathbb{I}_{(-X_i>3)})} = Var(\mathbb{I}_{(X_i>3)})$ (Inégalité de Hölder).
En conséquence ; $Var(\tilde{I}) \leqslant \frac{1}{4n}\left(4Var(\mathbb{I}_{(-X_i>3)})\right) = Var(\hat{I})$.

Exercice 5 :
Estimons la valeur de $I = \int_0^1 \cos\frac{\pi x}{2}dx$ par la méthode de Monte-Carlo et appliquons une amélioration de cette valeur à l'aide de la méthode de l'échantiollonnage préférentiel.
On note que $I = E(\cos(\frac{\pi X}{2}))$ où $X \sim \mathcal{U}(0,1)$.
L'approximation initiale de I par la méthode de Monte-Carlo est donc définie par :

$$\widehat{I}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi X_i}{2}\right) \tag{1}$$

où les X_i sont des valeurs simulées d'une variable $X \sim \mathcal{U}(0,1)$. Afin d'améliorer cette approxiamtion avec la méthode de l'échantillonnage préférentiel, on peut approcher $\cos(\frac{\pi x}{2})$ par son développement limité au voisinage de 0, soit :

$$|h(x)f(x)| = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \approx 1 - \frac{\pi^2 x^2}{8} \approx 1 - x^2$$

et prendre

$$\tilde{f}(x) = \frac{h(X)f(X)}{E(h(X))} = \frac{1-x^2}{\int_0^1 (1-x^2)dx} = \frac{3}{2}(1-x^2)$$

Une approximation améliorée de I est alors donnée par :

$$\tilde{I}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{h(Y_i)f(Y_i)}{\tilde{f}(Y_i)}$$

où les Y_i sont des valeurs simulées d'une variable Y selon la densité $\tilde{f}$ et $\frac{h(x)f(x)}{\tilde{f}(x)} = \frac{\cos(\frac{\pi x}{2})}{\frac{3}{2}(1-x^2)}$.
On pourait aussi faire :

$$|h(x)f(x)| \approx \tilde{f}_1 = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 1 - x$$

$$\tilde{f}(x) = \frac{1-x}{1/2}$$

La fonction $\tilde{f}_1$ est (grossièrement) proche de $h(x)f(x)$.
Si $U \sim \mathcal{U}([0,1])$, alors $1-\sqrt{U}$ est de loi de densité $\tilde{f}$ (nous trouvons ce résultat par la méthode d'inversion de la fonction de répartition).
Donc, nous savons simuler la loi de densité $\tilde{f}$.

Exercice 6 :
Calculons $I = \int_0^1 \exp(x^2)dx$ par une méthode de Monte-Carlo puis appliquons la méthode de variable de contrôle.
Nous avons $I = E(e^{X^2})$ avec $X \sim \mathcal{U}([0,1])$.
Donc nous pouvons faire l'approximation $I \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e^{X_i^2}$ avec $X_1, X_2, \cdots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{U}([0,1])$ (toujours pour "n grand"). Nous avons donc une première méthode de Monte-Carlo. Avec les notations ci-dessus, nous avons $f(x) = \exp(x^2)$. Remarquons que $h \mapsto 1 + x^2$ est proche de f sur $[0,1]$ (c'est le début du développement limité de f en 0). Nous savons calculer

$$E(h(X)) = \int_0^1 (1+x^2)dx = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Nous pouvons faire l'approximation

$$I \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(e^{X_i^2} - 1 - X_i^2\right) + E(h(X))$$

Exercice 7 :
(1) $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$I = E(\mathbb{I}_{(X>0)}e^{\beta x}) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)e^{\beta x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$\Rightarrow \hat{I}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{(X_i>0)}e^{\beta X_i} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} I \quad \text{(Monte-Carlo standard)}$$

(2) Si on cherche à calculer $E(e^{\beta X})$ avec $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Nous savons que

$$\begin{aligned} E(e^{\beta X}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta x}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\beta)^2 + \frac{\beta^2}{2}\right)dx \\ &= e^{\frac{\beta^2}{2}} \end{aligned}$$

Si nous tirons $X_1, \cdots, X_n$ i.i.d. de même loi que X, nous aurons

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e^{\beta X_i} \approx E(e^{\beta X}) + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Y$$

avec $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\sigma^2 = Var(e^{\beta X})$ (d'après le théorème de la limite-centrale).

Un calcul similaire à celui que nous venons de faire nous donne :

$$\sigma^2 = e^{2\beta^2} - e^{\beta^2}$$

En ce qui concerne l'erreur relative

$$\frac{1}{E(e^{\beta X})}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{\beta X_i} - E(e^{\beta X})\right| \approx \frac{\sigma}{E(e^{\beta X})\sqrt{n}} E(|Y|) = \frac{\sigma}{E(e^{\beta X})\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Nous avons $\frac{\sigma}{E(e^{\beta X})} = \sqrt{e^{\beta^2}-1}$. Par exemple, si $\beta = 5$, si nous voulons une erreur relative de l'ordre de 1, il faut prendre n tel que

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{e^{\beta^2}-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \geqslant 1,96$$

c'est-à-dire n de l'ordre de 4×10^{11}, ce qui n'est pas réalisable dans la pratique. C'est pourquoi il est important de réduire la variance.

(3) **Méthode d'échantillonnage préférentiel :**

Posons $h(x) = \mathbb{I}_{\{x>0\}} e^{\beta x}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

Nous remarquons que

$$h(x)f(x) = \frac{\mathbb{I}_{\{X>0\}}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\beta)^2 + \frac{\beta^2}{2}\right)$$

Nous utilisons les mêmes notations que dans le cours et prenons

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\beta)^2 + \frac{\beta^2}{2}\right)$$

Nous avons

$$\frac{\tilde{f}(x)}{\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(y)dy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\beta)^2\right)$$

(c'est la densité de $\mathcal{N}(\beta, 1)$, suivant laquelle nous savons simuler).

(4) **Méthode de variable de contrôle :**

Nous avons

$$I = E(f(X))$$

avec $f(x) = \mathbb{I}_{\{x>0\}} e^{\beta x}$

$$= E(f(X) - h(X)) + E(h(X))$$

avec $h(x) = e^{\beta x}$ et $E(h(X)) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left((-\frac{x^2}{2}+\beta x)\right)}{\sqrt{2\pi}} dx$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\beta)^2 + \frac{\beta^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} dx$$

$$= \exp\left(\frac{\beta^2}{2}\right)$$

(4) **Technique de variable antithétique :**

Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $-X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Donc

$$E(h(X)) = E(h(-X)) = E\left(\frac{h(X)+h(-X)}{2}\right)$$

On en déduit une nouvelle méthode de Monte-Carlo pour approcher l'espérance.

Exercice 8 :

1. Soit X de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrons que $|X|$ est de densité f. Nous calculons, pour toute fonction φ une fonction de l'ensemble des fonctions positives, continues, bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} E(\varphi(|X|)) &= \int_{-\infty}^{0} \varphi(|x|)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx + \int_{0}^{+\infty} \varphi(|x|)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} \varphi(-x)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx + \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx \\ (y=-x) &= \int_{+\infty}^{0} \varphi(y)\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}(-dy) + \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx \\ &= \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{\pi}}dx. \end{aligned}$$

2. Nous avons, pour $X \sim \mathcal{N}(0,1)$,
$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx.$$
Cette dernière intégrale est convergente car $x^2 \times x^2 f(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Donc, si nous tirons $X_1, X_2, \cdots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors (par la loi des grands nombres)
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} I.$$

3. Nous proposons de prendre
$$\tilde{f}_1(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}\mathbb{I}_{[1,+\infty[}(x)$$
(c'est une fonction qui a l'air raisonnablement proche de $f \times g$). Nous avons
$$\int_0^{+\infty} \tilde{f}_1(x)dx = [-e^{-\frac{x^2}{2}}]_0^{+\infty} = 1$$
Nous posons donc $\tilde{f} = \tilde{f}_1$. Nous pouvons calculer la fonction de répartition de la densité $\tilde{f}$ (pour $x \geqslant 0$) :
$$\begin{aligned} \tilde{F}(x) &= \int_0^x te^{-\frac{t^2}{2}}dt \\ &= [-e^{-\frac{t^2}{2}}]_0^x \\ &= 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$
Et nous savons inverser cette fonction de répartition. Si $u \in [0,1]$, cherchons x tel que $u = F(x)$. Il suffit de prendre
$$\begin{aligned} u &= 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} \\ e^{-\frac{x^2}{2}} &= 1-u \\ x &= \sqrt{-2\ln(1-u)}. \end{aligned}$$

Donc nous savons simuler des variables de loi de densité $\tilde{f}$ (c'est la méthode "par inversion" de la fonction de répartition).

Nous avons donc une deuxième méthode de Monte-Carlo pour calculer I (dont on peut espérer que la variance est réduite par rapport à la première méthode). Remarquons que, pour $x \geqslant 0$,

$$\frac{f(x)g(x)}{\tilde{f}(x)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}x.$$

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}^+} \left| \frac{f(x)g(x)}{\tilde{f}(x)} \right| \tilde{f}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^+} f(x)g(x)dx < \infty$$

Nous tirons $U_1, U_2, \cdots, U_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0,1])$ et, par la loi des grands nombres, nous avons :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{-2\ln(1-U)} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} I.$$

Exercice 9 :
On s'intéresse à l'estimation de l'intégrale $\int_0^1 e^u du = e - 1$.

1. L'estimateur de Monte-Carlo standard est $\hat{I}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e^{U_i}$, où les U_i sont des v.a. i.i.d. uniformement sur $[0,1]$. On a alors $\sqrt{n}(\hat{I}_n - I) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, avec $\sigma^2 = Var(e^U) = E(e^{2U}) - E(e^U)^2 = \frac{1}{2}(e^2-1) - (e-1)^2 \approx 0.24$. Un estimateur naturel de σ^2 est

$$\hat{\sigma}_n^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e^{2U_i}\right) - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e^{U_i}\right)^2.$$

2. Puisque la fonction exponentielle est monotone, on va nécessairement gagner en variance grâce à l'estimateur antithétique

$$\tilde{I}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{e^{U_i} + e^{1-U_i}}{2}.$$

La variance est cette fois

$$s^2 = Var\left(\frac{e^{U_i} + e^{1-U_i}}{2}\right) = \frac{1}{2}(Var(e^U) + Cov(e^U, e^{1-U})).$$

Le premier terme a été déjà calculé, c'est σ^2. Pour le deuxième, puisque U et $(1-U)$ ont même loi,

$$Cov(e^U, e^{(1-U)}) = E(e^U e^{(1-U)}) - E(e^U)E(e^{(1-U)}) = e - I^2,$$

d'où

$$s^2 = \frac{1}{2}(\sigma^2 + e - I^2) \approx 4.10^{-3}.$$

Puisque la précision est donnée par l'écart-type et comme $\sigma/s \approx 7,7$, on peut en déduire que, pour un n donée, on a un estimateur environ 8 fois plus précis. Par ailleurs, si on considère qu'il faut environ deux fois plus de temps de calcul pour $\tilde{I}_n$ que pour $\hat{I}_n$, on conclut que, pour une précision donnée, le temps de calcul est grosso modo divisé par 4.

3. De $E(U) = \frac{1}{2}$, on déduit que pour toute constante c, $E(X_c) = E(\exp(U)) = I$. Pour la variance, il vient

$$Var(X_c) = Var(U)c^2 + 2Cov(U, \exp(U))c + Var(\exp(U)),$$

quantité minimale en

$$c = c^* = -\frac{Cov(U, \exp(U))}{Var(U)},$$

qui donne

$$Var(X_{c^*}) = Var(\exp(U)) - \frac{Cov(U, \exp(U))^2}{Var(U)}.$$

On a $Var(\exp(U)) = \sigma^2$, $Var(U) = \frac{1}{12}$ et

$$Cov(U, \exp(U)) = E(U \exp(U)) - E(U)E(\exp(U)) = 1 - \frac{1}{2}(e - 1),$$

d'où

$$Var(X_{c^*}) = \sigma^2 - 12(1 - \frac{1}{2}(e - 1))^2 = 0,00394...$$

A très peu de choses près, la rédution de variance est donc la même que celle de l'estimateur antithétique.