Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2019/2020
Master M.A.F.
Semestre 2

T.D. de Méthodes de Monté-Carlo
Série n° 4

Exercice 1 :

1. Donner l'approximation $\hat{I}_n$ de l'intégrale $I = \int_0^2 e^{-x^2} dx$ par une méthode de Monte-Carlo.
2. Donner une estimation de la précision de $\hat{I}_n$
3. Montrer que cette approximation est sans biais.
4. Montrer que l'estimateur $\hat{I}_n$ est convergent.
5. Vérifier sa normalité asymptotique.
6. Donner un intervalle de confiance de I à 95%.
7. Quelle est la vitesse de convergence de cet estimateur.

Exercice 2 :
Donner deux méthodes de Monte-Carlo différentes d'approximation des intégrales suivantes à l'aide d'une moyenne empirique impliquant des v.a. de loi connue :

1. $I = \int_0^1 \cos(x^3) \exp(-x) dx$
2. $J = \int_0^{+\infty} \sin(x^4) \exp(-2x) \exp(-\frac{x^2}{2}) dx$
3. $K = \int_0^1 \ln(1 + x^2) \exp(-x^2) dx$
4. $L = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} e^{-x} dx$
5. $M = \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx$
6. $N = \int_0^1 \sin(\sqrt{x}) dx$

Exercice 3 :
Soient $X, X_1, X_2, \cdots$ des variables i.i.d. uniformes dans $C = [-1, 1] \times [-1, 1]$ (sous-endentu : $X = (U_1, U_2)$ avec U_1 et U_2 indépendantes et de loi uniforme sur $[-1, 1]$ toutes les deux). Soit D le disque (dans $\mathbb{R}^2$) de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

1. Calculer par une méthode de Monte-Carlo la valeur de $E(\mathbb{I}_{X \in D})$.
2. Estimer la variance de la méthode.

Exercice 4 :
Appliquer différentes méthodes de réduction de la variance pour estimer $P(X > 3)$, où X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 5 :
Estimer la valeur de $I = \int_0^1 \cos \frac{\pi x}{2} dx$ par la méthode de Monte-Carlo et appliquer une amélioration de cette valeur à l'aide de la méthode de l'échantiollonnage préférentiel.

Exercice 6 :
Calculer $I = \int_0^1 \exp(x^2)dx$ par une méthode de Monte-Carlo puis appliquer la méthode de variable de contrôle.

Exercice 7 :
On veut calculer $I = E\left(\mathbb{I}_{\{X>0\}}e^{\beta x}\right)$ où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $\beta = 5$. On estimera la variance à chaque étape de l'exercice.

1. Calculer (par Monte-Carlo) la variance par la méthode initiale (naive) (quand on tire des $X_1, X_2, \cdots, X_n$ i.i.d. de loi N(0,1) et que l'on approche I par $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{X_i\}}e^{\beta X_i}$).
2. Proposerune méthode d'échantillonnage préférentiel.
3. Proposer une méthode de variable de contrôle.
4. Améliorer la méthode à l'aide d'une technique de variable antithétique.

Exercice 8 :
Nous définissons des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{\pi}}\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)$$

$$g(x) = x^2$$

On s'intéresse à l'intégrale $I = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx$.

1. Comment simuler une variable de densité f ?
2. Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer de manière approchée, en utilisant la simulation de la v.a. de la question précédente.
3. Proposer une méthode de réduction de la variance par échantillonnage préférentiel (appellée aussi "fonction d'importance").

Exercice 9 :
On s'intéresse à l'estimation de l'intégrale $I = \int_0^1 e^u du$.

1. Rappeler la formule de l'estimation Monte-Carlo standard $\hat{I}_n$. Rappeler le Théorème Central Limite auquel il obéit et calculer la variance σ^2 qu'il faut intervenir. Donner un estimateur $\hat{\sigma}_n^2$ de σ^2.
2. Donner un estimateur $\hat{I}_n$ de I à base de variables antithétiques. Quelle est sa variance théorique S^2 ? Par rapport au Monte-Carlo standard, par combien (environ) a-t-on divisé le temps de calcul pour atteindre la même précision ?
3. Soit c une constante et $X_c = \exp(U) + c(U - \frac{1}{2})$, où $U \sim \mathcal{U}([0,1])$. Quelle est la moyenne de la variable X_c ? Exprimer la variance de X_c en fonction de c et des variances et covariance de U et $\exp(U)$. En déduire la valeur c^* de c rendant cette variance minimale et préciser $Var(X_{c^*})$. Comparer à S^2.