Mise à niveau en Statistique

LP « Informatique de Gestion »

Mohamed El Merouani 1

Programme:

- Notion de probabilité.
- Variables aléatoires.
- Lois de probabilités.
- Approximation d’une loi par une autre.
- Lois de la somme de deux v. a. indépendantes.

Mohamed El Merouani 2

Bibliographie:

- Abdelmajid Gagou: «Introduction aux probabilités: cours avec exercices corrigés », Impremerie de Fedala, 1ère édition, 1996.
- M. Ellatifi: «Exercices et problèmes résolus de statistiques-1: Probabilités », Afrique Orient, 1984.
- Mustapha Kchirid: « Calcul des probabilités: Exercices corrigés avec rappel de cours », Editions El Badil, 2ème édition, 2002.

Notion de probabilité et Variables aléatoires.

Définitions de probabilité

- Il existe plusieurs définitions:
  - Définition fréquentielle
  - Définition axiomatique ou ensembliste
  - Définition bayesienne

Notion d'événement

- Un événement est la réalisation d'un résultat possible.
- On dit que cet événement est aléatoire lorsque sa réalisation est soumise au hasard.
- **Exemples**:
  - Obtenir 5 en lançant un dé
  - Amener face en lançant une pièce de monnaie,…

Notation ensembliste

- L'ensemble de tous les résultats possibles, on le note Ω et appelé ensemble fondamental.
- Les événements sont des parties (des sous-ensembles) de Ω, sont notés A, B, C,…

Définitions de probabilité

- **Fréquentielle:**

$$\boxed{P(A) = \frac{nbre\,de\,cas\ favorables}{nbre\,de\,cas\ possibles}}$$

- **Axiomatique:**
  À chaque événement *A*, on associe un nombre *P(A)* qui exprime le degré de possibilité de réalisation de l'événement *A* avec $0 \leq P(A) \leq 1$ appelé probabilité de l'événement A vérifiant les propriétés suivantes:
  - *P(Ω)=1*
  - Si A et B sont deux événements tels que *A∩B=Ø* alors *P(AUB)=P(A)+P(B)*

Variables aléatoires

- Une variable aléatoire notée X est une application de l'ensemble fondamental Ω dans l'ensemble IR des nombres réels, qui fait correspondre à tout événement A un nombre réel.
- **Exemple:**
  Pour l'expérience du lancement d'une pièce de monnaie:

$$X: \Omega \longrightarrow IR$$

$$\{\text{amener pile}\} \longmapsto X(\{\text{amener pile}\})=0$$

$$\{\text{amener face}\} \longmapsto X(\{\text{amener face}\})=1$$

Et on a $P(X=0)=1/2$; $P(X=1)=1/2$

Variables aléatoires

- Il y a deux types de variables aléatoires:
  - Variable aléatoire discrète
  - Variable aléatoire continue
- Si X prend des valeurs discrètes 0, 1, 2, … elle est dite discrète.
- Si X prend des valeurs continues sur tout un intervalle de IR, par exemple $[a, b]$, elle est dite continue.

Loi de probabilité

- **Discrète:**

  La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est définie par:
  - Les valeurs que peut prendre X: $x_1, x_2, \dots, x_n$.
  - Les probabilités de ces valeurs $P(X=x_i)=p_i$

Exemple

- Pour l'expérience de lancement d'une pièce de monnaie, on a:

  $P(X=0)=1/2$; $P(X=1)=1/2$

  Alors $P(X=0)+P(X=1)=1$
- La loi de probabilité de X est résumée par le tableau suivant:

x_i	0	1	Σp_i
p_i	1/2	1/2	1

- **Continue:**
  Les valeurs que prendre *X* sont continues, alors la probabilité de ces valeurs est une fonction continue *f*, appelée fonction densité de probabilité.
- **Propriétés de la densité:**
  - La fonction f est à valeurs positives sur l'ensemble de définition *D* de la variable aléatoire X
  - La fonction f est nulle en dehors de D l'ensemble de définition de X.
  - L'intégrale de f sur D l'ensemble de définition de X est égale à 1.

$$\int_D f(x)dx = 1$$

Mohamed El Merouani 13

Espérance mathématique:

- Discrète:
- L'espérance mathématique d'une v. a. discrète X, notée E(X) est:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

- Continue:
- L'espérance mathématique d'une v. a. continue X, est donnée par:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

Mohamed El Merouani 14

Exemple

- Pour l'expérience de lancement d'une pièce de monnaie, on a:

x_i	0	1	Σp_i
p_i	1/2	1/2	1

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i = x_1\, p_1 + x_2\, p_2 = 0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Propriétés de l'espérance

- Soient *X* et *Y* deux v. a., et α et β deux réels quelconques, alors:

$$E(\alpha X+\beta)=\alpha E(X)+\beta$$

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

$$E(X-Y)=E(X)-E(Y)$$

Variance et écart-type

- La variance d'une v.a. X, notée Var(X) est définie par:

$$Var(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$$

- Ou encore:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Écart-type

- L'écart-type d'une variable aléatoire X, noté σ(X), est défini comme la racine carrée de sa variance,

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var(X)}}$$

Exemple:

- Pour l'expérience de lancement d'une pièce de monnaie, on a:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E\left(X^2\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 = 0^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$Var(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{Var(X)}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Fonction de répartition:

- La probabilité pour que la variable aléatoire X prenne une valeur inférieure ou égale à x est une fonction F(x).
- Cette fonction est appelée fonction de répartition de x.

  F(x)=P(X≤x).
- La fonction F(x) est une fonction en escalier, croissante de 0 à 1.

Exemple de fonction de répartition:

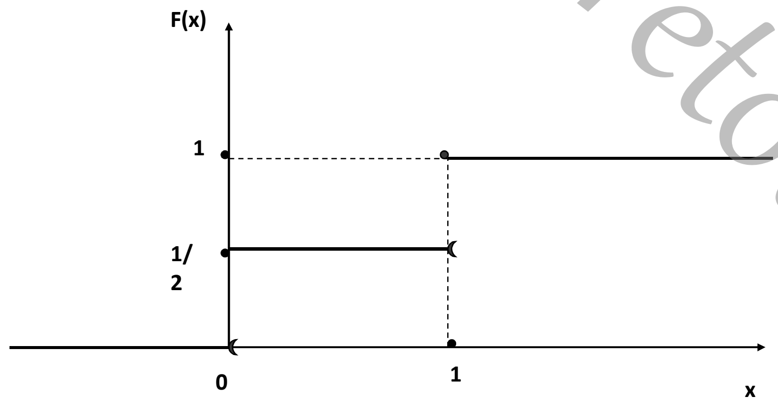
- Pour l'expérience de lancement d'une pièce de monnaie, on a la loi de probabilité de X est résumée par le tableau suivant:

x_i	0	1	Σp_i
p_i	1/2	1/2	1

- Sa fonction de répartition sera:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Représentation graphique de F(x):



Exercice:

- On considère l'expérience du lancement d'un dé à six faces. On considère la variable aléatoire X qui fait correspondre à chaque résultat le numéro obtenu en lançant ce dé.

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Calculer E(X).
3. Quelle est la Var(X) et son écart-type.
4. Donner sa fonction de répartition et représenter-la graphiquement.

Solution:

1. Loi de X:

x_i	1	2	3	4	5	6	$\sum p_i$
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

2. Son éspérance est:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{6} x_i\, p_i \;=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}+\frac{6}{6}=\frac{21}{6}$$

3. Sa variance est:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} + \frac{16}{6} + \frac{25}{6} + \frac{36}{6} = \frac{91}{6}$$

$$Var(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{441}{36} = \frac{547 - 441}{36} = \frac{106}{36}$$

Son écart-type est:

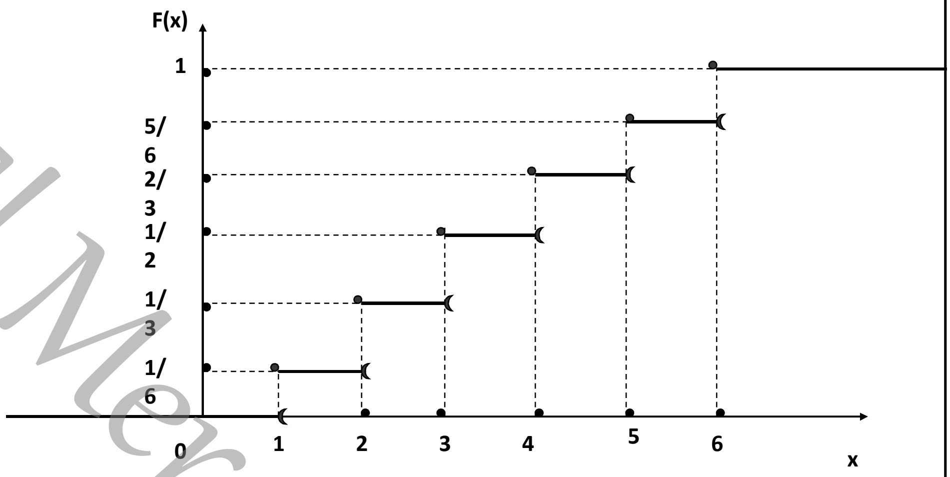
$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{106}{36}} = \ldots$$

4. On a:

x_i	1	2	3	4	5	6	$\sum p_i$
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 1 \\ 1/6 & si\ 1 \le x < 2 \\ 1/3 & si\ 2 \le x < 3 \\ 1/2 & si\ 3 \le x < 4 \\ 2/3 & si\ 4 \le x < 5 \\ 5/6 & si\ 5 \le x < 6 \\ 1 & si\ x \ge 6 \end{cases}$$

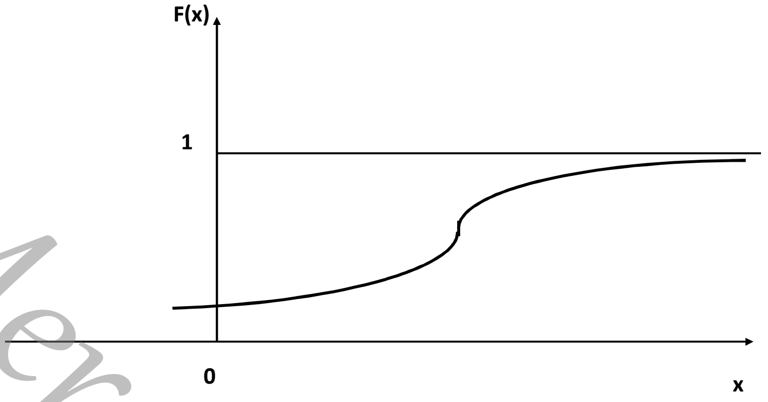
Représentation graphique de F(x):



Fonction de répartition d'une v.a. continue:

- On définit la fonction de répartition F d'une v. a. continue X de la même manière que pour une v.a. discrète, c'est-à-dire $F(x)=P(X\leq x)$.
- La fonction continue $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ est croissante de 0 à 1 lorsque x varie de -∞ à +∞.
- Par conséquent, une v.a. continue est une v.a. dont la fonction de répartition est continue.
- La fonction de densité f d'une v.a. continue X est la dérivée de da fonction de répartition F, c'est-à-dire $F'(x)=f(x)$.

Représentation graphique de F(x) continue:



Conséquences:

Pour *X* v.a. continue on a:

- *P(X=c)=0* avec *c* une constante réelle.
- *P(a<X<b)=F(b)-F(a)* avec *a* et *b* des réelles.
- *P(X≤a)=P(X<a)* $=\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt$
- *P(X≥b)=P(X>b)* $=\int_{b}^{+\infty} f(t)dt$

Exemples

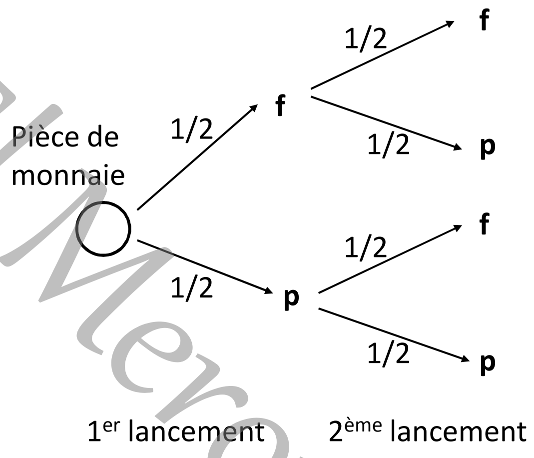
Exercices résolus

Exemple 1

- Dans l'épreuve du lancement deux fois une pièce de monnaie, considérons la variable aléatoire X représentant le nombre de piles obtenues en ces deux lancements.
- On désigne par « f » face et « p » pile.

1. Donner l'espace fondamental de tous les résultats de cette épreuve.
2. Donner la loi de probabilité de la v. a. X.
3. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.
4. Donner sa fonction de répartition et représenter-la graphiquement.

Corrigé



L'espace fondamental sera, donc,

Ω={ff, fp, pf, pp}

- Chaque élément de Ω a une probabilité $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ car, par exemple,

P(ff)=P(f et f)=P({f}∩{f})=P({f}/{f}).P({f})=1/2x1/2.

- On a utilisé $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ avec $P(B)>0$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=P(A/B)\cdot P(B)$$

2. Variable aléatoire X: $\Omega \longrightarrow IR$

$ff \longrightarrow X(ff)=0$

$fp \longrightarrow X(fp)=1$

$pf \longrightarrow X(pf)=1$

$pp \longrightarrow X(pp)=2$

Ce qui nous permet de donner la loi de probabilité de X:

xi	0	1	2	∑pi
pi	1/4	2/4=1/2	1/4	1

3. Espérance de X:

$$E(X)=\sum_i x_i\, p_i \;=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

Variance de X: $Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

$$E(X^2)=\sum_i x_i^2\, p_i \;=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

$$Var(X)=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

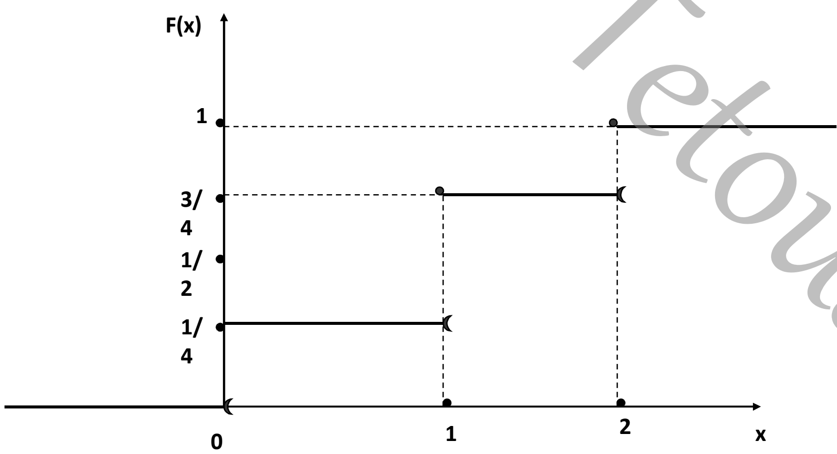
Ecart-type de X: $\sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. Fonction de répartition:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \ \ x < 0 \\ 1/4 & si \ \ 0 \le x < 1 \\ 3/4 & si \ \ 1 \le x < 2 \\ 1 & si \ \ x \ge 2 \end{cases}$$

Mohamed El Merouani 37

Représentation graphique de F(x):



Mohamed El Merouani 38

Exemple 2

- On choisit au hasard un nombre de l'intervalle [0, 10].
- Soit la variable aléatoire X représentant ce nombre choisi.
- X est une v. a. continue du fait que les intervalles de IR le sont.

1. Donner sa fonction de répartition et représenter-la graphiquement.
2. En déduire sa fonction densité de probabilité et représenter-la graphiquement.
3. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

corrigé

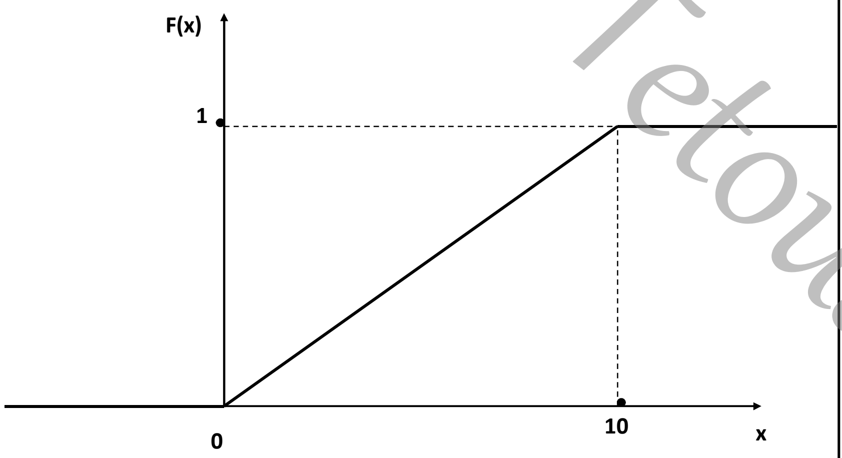
- La fonction de répartition cherchée sera définie par:

$$
\begin{aligned}
&F : IR \rightarrow [0,1] \\
&x \mapsto F(x) = P(X \leq x)
\end{aligned}
$$

$$
F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \dfrac{x}{10} & si\ 0 \leq x < 10 \\ 1 & si\ x \geq 10 \end{cases}
$$

- En effet, si $x<0$, alors, dans ce cas, l'événement $(X\leq x)=\emptyset$ et par suite $F(x)=P(X<0)=0$.
- Si $0\leq x<10$, alors $P(X \leq x)=\frac{x}{10}$ où x indique la longueur de l'intervalle des points qui vérifient $X\leq x$ et 10 est la longueur de l'intervalle de tous les points possibles à choisir.
- Si $x\geq 10$, alors $P(X\leq x)=1$ car $(X\leq x)$ dans ce cas représente l'ensemble de tous les résultats possibles.

Représentation graphique de F(x):



- F est donc une fonction continue et dérivable sauf en deux points qui sont x=0 et x=10.
- En général, la fonction de répartition d'une v. a. continue est dérivable (sauf peut-être dans quelques points)

2. La fonction de densité f d'une v. a. continue X est la dérivée de sa fonction de répartition F, c'est-à-dire:

$$F'(x) = f(x)$$

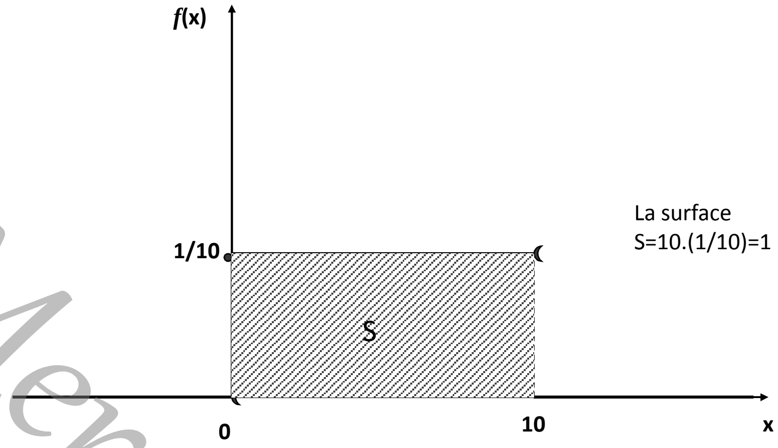
On a vu que

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x < 0 \\ \dfrac{x}{10} \ si \ 0 \leq x < 10 \\ 1 \ si \ x \geq 10 \end{cases}$$

Alors la fonction de densité est:

$$f'(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 \quad si \quad x \notin [0,10[\\ \dfrac{1}{10} \quad si \quad x \in [0,10[\end{cases}$$

qui a pour représentation graphique:



- On peut prouver que les propriétés $(f(x) \geq 1 \ \forall x)$ et $(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1)$ des fonctions de densités se vérifient pour cet exemple.

3. L'espérance de X sera:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{10} xf(x)dx + \int_{10}^{+\infty} xf(x)dx$$

donc

$$E(X) = 0 + \int_{0}^{10} \frac{x}{10} dx + 0 = \frac{1}{10}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{10} = \frac{1}{10}\left(\frac{100}{2} - 0\right) = 5$$

- Sa variance $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
  avec

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)dx + \int_{0}^{10} x^2 f(x)dx + \int_{10}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

$$E(X^2) = 0 + \int_{0}^{10} \frac{x^2}{10} dx + 0 = \frac{1}{10}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = \frac{1}{10}\left(\frac{10^3}{3} - 0\right) = \frac{10^2}{3} = \frac{100}{3}$$

Alors

$$Var(X) = \frac{100}{3} - 5^2 = \frac{25}{3} = 8{,}333$$

et $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{8{,}333} = 2{,}887$

Exemple 3

- Soit X une v. a. continue de fonction de densité f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si\ x \in [0,1[\\ 0 & si\ x \notin [0,1[\end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une fonction de densité et représenter-la graphiquement.
2. Calculer la probabilité pour que 0,5<X<0,7.
3. Donner sa fonction de répartition et recalculer la probabilité pour que 0,5<X<0,7.
4. Calculer l’espérance, la variance et l’écart-type de X.

Corrigé

1. Pour vérifier que f est bien une fonction de densité, il faut que:

   (a) f soit positive ou nulle: ici, on a

   f(x)=2x≥0 lorsque 0≤x<1

   f(x)=0 lorsque x<0 ou x≥1

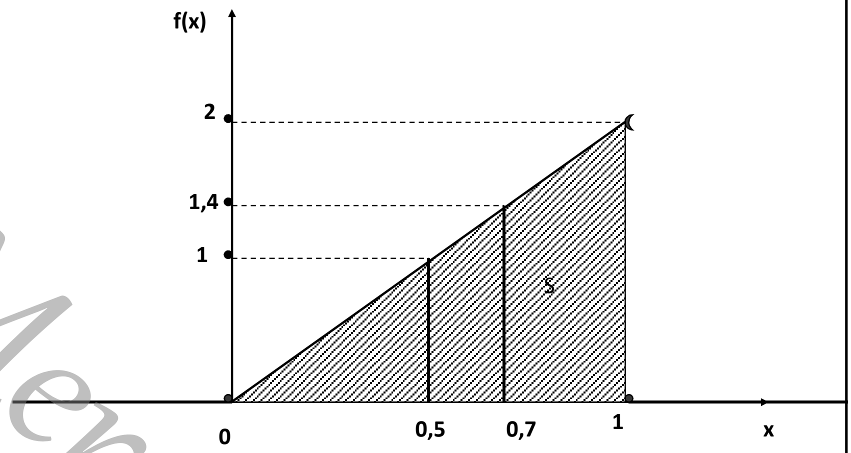
et (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, en effet;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} 2x dx + \int_{1}^{+\infty} 0 dx$$

$$= \left[x^2\right]_0^1 = (1-0) = 1$$

Représentation graphique de f(x):



S=1/2 x 2 x 1 = 1

2. Calcul de la probabilité pour que 0,5<X<0,7

$$P(0{,}5 < X < 0{,}7) = \int_{0,5}^{0,7} f(x)dx = \int_{0,5}^{0,7} 2x dx = \left[x^2\right]_{0,5}^{0,7}$$

$$= (0{,}7)^2 - (0{,}5)^2 = 0{,}49 - 0{,}25 = 0{,}24$$

3. Par définition $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Pour $x \in [0,1[$

on a: $F(x) = \int_0^x 2tdt = 2\int_0^x tdt = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = x^2$

alors

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\, x < 0 \\ x^2 & si\, 0 \leq x < 1 \\ 1 & si\, x \geq 1 \end{cases}$$

On peut maintenant recalculer la probabilité pour que 0,5<X<0,7 de cette façon:

$$P(0,5 < X < 0,7) = F(0,7) - F(0,5) = (0,7)^2 - (0,5)^2 = 0,24$$

c'est-à-dire en utilisant la formule:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

4. Espérance:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{1} x(2x)dx+\int_{1}^{+\infty} 0dx$$

$$=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

Variance: $Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{1} x^2(2x)dx+\int_{1}^{+\infty} 0dx=2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

et finalement $Var(X)=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$

$$\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}=\frac{1}{\sqrt{18}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

Loi de probabilités conjointes de deux v. a. discrètes:

- Un couple de v. a. (X, Y) peut prendre les valeurs successives suivantes:

  (x_1,y_1) ; (x_2,y_2) ; …; (x_i,y_j) ; …; (x_n,y_m)

  A chaque couple (x_i,y_j) correspond une probabilité p_{ij} d'observer simultanément la valeur x_i pour X et la valeur y_j pour Y:

  $$p_{ij}=P(X=x_i \text{ et } Y=y_j)=P(X=x_i, Y=y_j)$$

- On a $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}=1$$

Loi de probabilités conjointes de deux v. a. continues:

- La loi de probabilité conjointes d'un couple de v. a. (X,Y) est définie lorsqu'on connaît:

1. Le domaine de définition du couple (où la fonction de densité de probabilité est non nulle) et;
2. La fonction de densité de probabilité conjointe f qui doit vérifier:

   a. $f(x,y) \geq 0$

   b. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$

Indépendances des variables aléatoires discrètes :

- Deux v. a. discrètes X et Y sont dites indépendantes si

$$P(X=x_i;\ Y=y_j)=P(X=x_i).P(Y=y_j)$$

pour tout x_i et y_j.

Indépendances des variables aléatoires continues :

- Deux v. a. continues X et Y de fonctions de densités de probabilités marginales respectives f_1 et f_2 et de fonctions de probabilité conjointe f sont dites indépendantes si et seulement si

$$f(x,y) = f_1(x).f_2(y)$$

Covariance entre deux variables aléatoires:

- La covariance entre deux v. a. X et Y, notée $\mathrm{Cov}(X,Y)$, est définie par

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

- Cas discrèt:

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j P(X=x_i, Y=y_j) - E(X)E(Y)$$

- Cas continue:

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, y\, f(x,y)\, dx\, dy - E(X)E(Y)$$

Propriétes:

- Soient X et Y deux v. a., alors on a:
  a) ***E(XY)=E(X)E(Y)*+Cov*(X,Y)***
  b) ***Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2*Cov*(X,Y)***
  c) ***Var(αX+β)=α²Var(X)*** où α et β sont deux réels quelconques.
- Si les variables X et Y sont indépendantes, alors:
  a) **Cov*(X,Y)=0***
  b) ***E(XY)=E(X)E(Y)***
  c) ***Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)***

Coefficient de corrélation entre deux v. a.

- Le coefficient de corrélation entre deux v. a. X et Y, notée ρ_{xy} est défini par

$$\rho_{xy} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \, \sigma_Y}$$

- Le coefficient de corrélation varie entre -1 et 1:

$$-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$$

Quelques lois de probabilités usuelles

Lois de probabilités discrètes

Loi de Bernoulli:

- Une v. a. X suit une loi de Bernoulli si elle prend les deux valeurs 1 et 0 avec $P(X=1)=p$ et $P(X=0)=q$ où $p+q=1$.
- $\{X=1\}$ est dit événement succès et $\{X=0\}$ est dit événement échec.
- X représente donc le nombre de succès obtenu après la réalisation d'une seule expérience aléatoire.

Loi de Bernoulli:

- La loi de probabilité de X suivant une loi de Bernoulli est:

x_i	1	0	Σp_i
p_i	p	q=1-p	1

Alors $E(X)=\Sigma x_i p_i=1xp+0xq=p$

$Var(X)=\Sigma x_i^2 p_i-E(X)^2=px1^2+qx0^2-p^2=p-p^2$

$Var(X)=p(1-p)=pq$

Loi Binômiale

- Considérons, lors d'une certaine expérience, un événement qui:
  - Soit se réalise avec la probabilité *p* (*p*=probabilité du succès).
  - Soit ne se réalise pas avec la probabilité *q=1-p* (*q*=probabilité d'échec).
- La probabilité de *k* réalisations (succès) de cet événement, au cours de *n* répétitions successives indépendantes de la même expérience, est fournie par la loi de probabilité binômiale:

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$$

Loi Binômiale

- On la note symboliquement *B(n, p).*
- La loi binômiale est une loi de probabilité discrète, mais finie; en effet, le nombre de réalisation k est égale à *0, 1, 2, …, n*.
- Le coefficient $$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

  où *n!* et *k!* indiquent le factoriel de n et de k,

  on a: *n!=1x2x3x…xn*

Loi Binômiale

- Espérance mathématique: *E(X)=np*
- Variance mathématique: *Var(X)=npq*
- Ecart-type: $\sigma(X)=\sqrt{npq}$
- La loi binômiale rend compte de tous les phénomènes répétés de manière indépendante pouvant prendre deux états, tels que: succès ou échec, tout ou rien.

Loi de Poisson:

- On dit qu'une v. a. obéit à une loi de Poisson, si elle est susceptible de prendre toutes les valeurs entières 0,1,2,…,k,…,n, les probabilités associées étant $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots, p_n$, avec

$$p_k = P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!}$$

- λ étant un paramètre positif, et e la base des logarithmes népériens.
- La constante λ s'appelle le paramètre de la loi.
- La loi de Poisson est notée $\mathrm{P}(\lambda)$.

Loi de Poisson:

- Espérance mathématique: $E(X)=\lambda$
- Variance mathématique: $Var(X)=\lambda$
- Ecart-type: $\sigma(X)=\sqrt{\lambda}$
- La loi de Poisson est appelée loi des petites probabilités. On l'utilise pour représenter des phénomènes rares, tels que: nombre d'accidents, nombre de pannes, nombre de déchets dans une fabrication…

Quelques lois de probabilités usuelles

Lois de probabilités continues

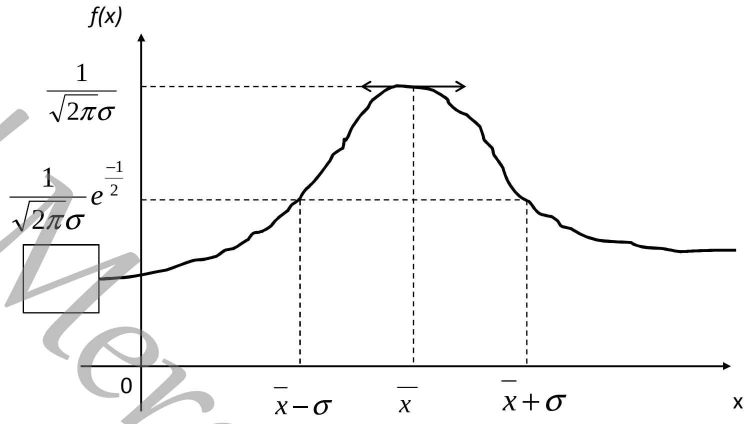
Loi Normale:

- La loi normale est la loi de probabilité d'une v.a. continue *X*, dont la densité de probabilité est:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

- On dit que l'on est en présence de la loi normale de moyenne x et d'écart-type σ.
- On la note par N(x, σ)
- Les deux paramètres de la loi sont x et σ.

Représentation graphique de N($\overline{x}$,σ)



Mohamed El Merouani 73

Loi normale centrée, réduite

Mohamed El Merouani 74

Variable normée

- Soit une v.a. X de réalisations x_i de moyenne $\overline{X}$ et d'écart-type σ_X.
- Définissons une nouvelle v.a. T de réalisations t_i telle que: $T = \frac{X - \overline{X}}{\sigma_X}$ de réalisations $t_i = \frac{x_i - \overline{x}}{\sigma_x}$
- La v.a. T de réalisations t_i est dite normée, si:
  - La moyenne arithmétique $\overline{t}$ est nulle: $\overline{t}=0$ (centrée)
  - L'écart-type σ_t est égal à l'unité: $\sigma_t = 1$ (réduite).

Définition de la loi normale centrée réduite

- En faisant le changement de variable

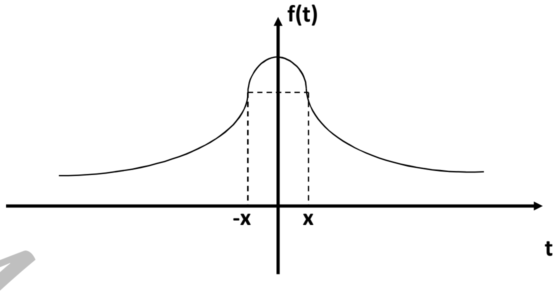
$$t = \frac{x - \overline{x}}{\sigma}$$

la loi normale N(m,σ) s'écrit:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-\left[(t\sigma+\overline{x})-\overline{x}\right]^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

cette loi est la loi normale, centrée réduite, car elle est de moyenne nulle et d'écart-type égal à l'unité. On la note N(0,1).

Allure et propriété de la loi normale réduite:



C'est une fonction symétrique par rapport à l'axe des ordonnées car elle est paire f(-x)=f(x)

Ainsi les tables de la loi normale centrée réduite, donnent les valeurs de la fonction f(t) uniquement pour des valeurs positives de la variable t.

La probabilité pour que T prenne une valeur de l'intervalle (t_1,t_2)

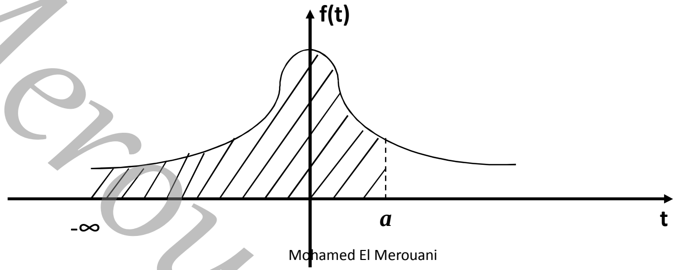
- S'écrit alors:

$$P(t_1 < T < t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

Fonction intégrale de la loi normale centrée réduite:

- On définit la fonction intégrale π(t) de la loi normale centrée réduite, en intégrant la fonction f(t) densité de probabilité de t:

$$\pi(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$



Propriétés:

- On démontre que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

- L'aire comprise entre la courbe N(0,1) et l'axe des t est égale à l'unité.

Exercice:

- La taille d'un groupe de 2000 personnes obéit à une loi normale N(170 cm, 5 cm).
- On demande de déterminer:

1. Le nombre de personnes dont la taille est comprise entre 168cm et 175cm.
2. La probabilité pour qu'une personne ait une taille supérieure à 180cm.

Solution:

1. Définissons la variable centrée réduite T à partir de la variable aléatoire *X*:

$$T = \frac{X - 170}{5}$$

- Alors P(168<X<175)=P(-0,4≤t≤+1)=
  =π(1)- π(-0,4)= π(1)-(1- π(0,4))=
  =π(1)+ π(0,4)-1

  Soit, en cherchant les valeurs de π(1) et de π(0,4) dans la table de la fonction intégrale de la loi normale centrée réduite: croisement de la ligne 1,0 et de la colonne 0,00; croisement de la ligne 0,4 et de la colonne 0,00.

- P(168≤x≤175)=0,8413+0,6554-1=0,4967
- Il y a donc: 2000x0, 4967≈993personnes dont la taille est comprise entre 168cm et 175cm.

2. La probabilité pour qu'une personne ait une taille supérieure à 180cm est:

   P(X>180)=P(T>2)=1-π(2)=1-0,9772=0,0228 soit une probabilité de 2,3%.

   Il y a alors vraisemblablement 2000x0,0228≈45personnes dont la taille dépasse 180cm.

Approximations de la loi binômiale

Il existe deux approximations possibles de la loi binômiale:

1. Approximation par la loi de Poisson
2. Approximation par la loi normale

Approximation par la loi de Poisson:

Si les conditions suivantes pour n et p sont réalisées:

- n est grand (≥50),
- p est voisin de 0,
- q est voisin de 1,

(C'est-à-dire dans le cas de la réalisation d'événements rares), la loi binômiale $B(n,p)$ peut-être approximée par une loi de Poisson $P(\lambda)$:

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k} \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

dont le paramètre λ est défini par: $\lambda=np$.

Exemple:

- La probabilité pour qu'une machine produise une pièce défectueuse est égale à 0,01. La machine a produit 300 pièces. Donner la probabilité de reconnaître 2 pièces défectueuses dans cette production.

- Soit X « le nombre de pièces défectueuses parmi les 300 pièces ».
- On peut dire que X suit une B(300; 0,01).

- La probabilité recherchée est égale à:

$$P(X=2)=C_{300}^{2}(0{,}01)^{2}(0{,}99)^{298}=0{,}2244$$

- Puisque la probabilité p est inférieure à 0,1 et *n>50*, on peut approcher la loi binomiale *B(300; 0,01)* par une loi de Poisson de paramètre $300\times 0{,}01=3$ et écrire $X \rightarrow P(3)$ et poser finalement:

$$P(X=2)=\frac{e^{-3}3^{2}}{2!}=\frac{0{,}0498\times 9}{2!}=0{,}2241$$

- Cet exemple a été donné pour permettre uniquement la comparaison. Mais, il ne montre pas la nécessité d'un recours aux approximations.
- Supposons maintenant que nous cherchons la probabilité d'avoir 10 pièces défectueuses parmi les 300 pièces.
- Le résultat exact serait de calculer

$$P(X=10)=C_{300}^{10}(0{,}01)^{10}(0{,}99)^{290}$$

qui est difficile à calculer.

- Nous sommes amenés dans ce cas à rapprocher ce résultat du résultat donné par une loi de Poisson de paramètre 3 et de calculer

$$P(X = 10) = \frac{e^{-3} 3^{10}}{10!} = 0{,}0008$$

Approximation par la loi normale

- Si les conditions suivantes pour n et p sont réalisées:
- n est grand (≥10)
- p est trop voisin de 0 ou de 1 (pratiquement $npq \geq 3$),
- La loi binômiale $B(n,p)$ peut être approximée par une loi normale

$$N\left(\bar{x} = np, \sigma = \sqrt{npq}\right)$$

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{npq}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}$$

La quantité $t_k = \dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$ obéit à une loi normale,.

centrée, réduite.

Mohamed El Merouani 91

Exemple:

- Étudions la probabilité d'obtenir 5 fois pile en 20 parties de pile ou face:
  - Par la loi binomiale
  - Par son approximation par la loi normale.
- La probabilité d'obtenir 5 piles en 20 coups est:

$$P(X=5)=C_{20}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{15}=\frac{20!}{5!15!}\cdot\frac{1}{2^5}\cdot\frac{1}{2^{15}}=15504\times 0{,}03125\times 0{,}0000305$$

$$P(X=5)\approx 1{,}48\%$$

Mohamed El Merouani 92

- Cette loi binomiale est approximée par la loi normale:

$$P(X=5)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{20\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{5-(20\times\frac{1}{2})}{\sqrt{20\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}}\right)^2}$$

$$P(X=5)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{5}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{-5}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{10\pi}}e^{-\left(\frac{1}{2}\times 5\right)}=\frac{1}{\sqrt{10\pi}}e^{-25}$$

$$=0{,}17841\times 0{,}08208$$

$$P(X=5)=1{,}46\%$$

- On voit sur cet exemple, que pour n=20, l'approximation est très bonne.

Approximation de la loi de Poisson par la loi normale:

Soit une v.a. qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.

Si $\lambda \geq 15$, alors cette loi de Poisson $P(\lambda)$ peut être approximée par une loi normale $N(\lambda,\sqrt{\lambda})$

Alors, la variable $T=\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ suit une normale centrée, réduite $N(0,1)$.

Exemple:

- Une usine fabrique 400 lampes électriques à l'heure. On admet que le nombre X de lampes défectueuses produites en une heure suit une loi de Poisson de paramètre λ.

1. On suppose que λ=15. Calculer $P(X>15)$.
2. Calculer cette même probabilité par son approximation par la loi normale.

- X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
- Donc $$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$
- λ=15 $$\Rightarrow P(X=k)=\frac{e^{-15}(15)^k}{k!}$$

$$P(X>15)=\sum_{k=16}^{400}\frac{e^{-15}.(15)^k}{k!}=1-P(0\leq X\leq 15)=1-\sum_{k=0}^{15}\frac{e^{-15}.(15)^k}{k!}$$

- La table de la loi de Poisson nous donne

$$\sum_{k=0}^{15}\frac{e^{-15}.(15)^k}{k!}\approx 0,568$$

- D'où $P(X > 15) \approx 0{,}432$

Addition de variables aléatoire indépendantes

Addition de variables aléatoire binomiales indépendantes

- Soit X une v. a. obéissant à une loi binomiale B(n,p) et Y une v. a. obéissant à une loi binomiale B(m,p).
- Si X et Y sont deux v. a. indépendantes, on démontre que:
- La v. a. $Z=X+Y$ suit une loi binomiale B(n+m,p)

Addition de variables aléatoire de Poisson indépendantes

- Soit X une v. a. obéissant à une loi de Poisson $P(\lambda)$ et Y une v. a. obéissant à une loi de Poisson $P(\mu)$
- Si X et Y sont deux v. a. indépendantes, on démontre que:
- La v. a. $Z=X+Y$ suit une loi de Poisson $P(\lambda+\mu)$.

Addition de variables aléatoire normales indépendantes

- Soit X une v. a. obéissant à une loi normale $N(\bar{x}, \sigma_x)$ et Y une v. a. obéissant à une loi normale $N(\bar{y}, \sigma_y)$
- Si X et Y sont deux v. a. indépendantes, on démontre que:

➢ La v. a. $Z=X+Y$ suit une loi normale $N(\bar{z}, \sigma_z)$:

❖ de moyenne $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$

❖ d'écart-type $\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$

➢ La v.a. $V=X-Y$ suit une loi normale $N(\bar{v}, \sigma_v)$

❖ de moyenne $\bar{v} = \bar{x} - \bar{y}$

❖ d'écart-type $\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$

- Ce théorème se généralise au cas de n variables indépendantes.