Chapitre 3: Théorème central limite

Prof. Mohamed El Merouani

Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques
https://elmerouani.jimdofree.com/calcul-des-probabilités

2020/2021

Exercices :

Exercice 1 : (Remarque 3)

Soit $(X_\lambda)_{\lambda>0}$ une famille de variables aléatoires, où le terme général X_λ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que $\frac{X_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$, lorsque λ tend vers l'infini.

Exercice 2 : (Remarque 4)

Soit $(X_p)_{p>0}$ une famille de variables aléatoires, où le terme général X_p suit la loi gamma $\Gamma(p,\lambda)$, $(\lambda>0)$. Montrer que $\frac{X_p-\frac{p}{\lambda}}{\sqrt{p}/\lambda}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$, lorsque p tend vers l'infini.

Exercices :

Exercice 3 : (Remarque 2)

Appliquer le théorème limite central à une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson de paramètre 1 pour trouver la limite de la suite $u_n = e^{-n}\sum_{0\leq k\leq n}\frac{n^k}{k!}$, $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 4 :

Soit X_n la somme de n variables aléatoires indépendantes uniformement réparties sur le segment $]0,1]$. Trouver la loi limite de la variable aléatoire X_n réduite. De quel théorème retrouve-t-on ici un cas particulier ?

Corrigés des exercices :

Corrigé de l'exercice 1 :

La fonction génératrice des moments de X_λ est $g_0(u) = \exp\left(\lambda(e^u - 1)\right)$
celle de $\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ est donc $g(u) = e^{-u\sqrt{\lambda}} \exp\left(\lambda(e^{u/\sqrt{\lambda}} - 1)\right)$
D'où $\ln g(u) = -u\sqrt{\lambda} - \lambda + \lambda e^{u/\sqrt{\lambda}}$
$= -u\sqrt{\lambda} - \lambda + \lambda\left(1 + \frac{u}{\sqrt{\lambda}} + \frac{u^2}{2\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)$
$= \frac{u^2}{2} + o(1) \to \frac{u^2}{2}$
ainsi $g(u) \to e^{u^2/2}$

Corrigés des exercices :

Corrigé de l'exercice 2 :

La fonction génératrice des moments de X_p est

$$g_0(u) = \exp\left(\frac{\lambda}{\lambda-u}\right)^p, \ (u<\lambda)\,;$$

celle de $\frac{X_p-\frac{p}{\lambda}}{\frac{\sqrt{p}}{\lambda}}$ est donc $g(u) = e^{-u\sqrt{p}} g_0\left(\frac{\lambda}{\sqrt{p}}u\right)$

$$g(u) = e^{-u\sqrt{p}}\left(\frac{1}{1-\frac{u}{\sqrt{p}}}\right)^p$$

D'où $\ln g(u) = -u\sqrt{p} - p\ln\left(1-\frac{u}{\sqrt{p}}\right)$

$$= -u\sqrt{p} - p\left(-\frac{u}{\sqrt{p}} - \frac{u^2}{2p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right)$$

$$= \frac{u^2}{2} + o\left(\frac{1}{p}\right) \to \frac{u^2}{2}$$

ainsi $g(u) \to e^{u^2/2}$

Corrigés des exercices :

Corrigé de l'exercice 3 :

Si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, on sait que $\sum_{k=1}^{n} X_k \sim \mathcal{P}(n\lambda)$ avec, en particulier, $E(\sum_{k=1}^{n} X_k) = n\lambda$ et $Var(\sum_{k=1}^{n} X_k) = n\lambda$. On prend alors $\lambda = 1$ et on applique le théorème limite central

$P\left(\frac{(\sum_{k=1}^{n} X_k)-n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2}$

or $P\left(\frac{(\sum_{k=1}^{n} X_k)-n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) = P(\sum_{k=1}^{n} X_k \leq n) = e^{-n} \sum_{0\leq k\leq n} \frac{n^k}{k!}$

D'où le résultat : $e^{-n} \sum_{0\leq k\leq n} \frac{n^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$

Corrigés des exercices :

Corrigé de l'exercice 3 : (Autre méthode)

La fonction caractéristique de la loi de Poisson de paramètre 1 est $e^{(e^{it}-1)}$; celle de la somme S_n de n variables aléatoires indépendantes suivant cette loi est donc $e^{n(e^{it}-1)}$. Puisque, par définition, la fonction caractéristique de S_n est égale à $\sum_k P(S_n = k)e^{kit}$, on obtient, en développant en série la fonction $e^{n(e^{it}-1)}$, $P(S_n \leq n) = e^{-n}\sum_{k=1}^{n} \frac{n^k}{k!}$.
La loi de Poisson admet un moment du second ordre ; on sait que dans ces conditions $\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}$ tend en loi vers la loi Normale réduite.
Ici $E(S_n) = n$; $\sigma(S_n) = \sqrt{n}$, et par suite
$P\left(0 \leq S_n \leq n\right) = P\left(\frac{-n}{\sqrt{n}} \leq \frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{2}$
D'où $e^{-n}\sum_{0\leq k\leq n} \frac{n^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$

Corrigés des exercices :

Corrigé de l'exercice 4 :

La fonction caractéristique de X est $\varphi(t) = \int_0^1 e^{itx}dx = \frac{e^{it}-1}{it}$.
Celle de X_n est donc $\varphi_n(t) = \left(\frac{e^{it}-1}{it}\right)^n$.
La moyenne de X est $\frac{1}{2}$, la variance de X est $\int_0^1 x^2dx - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$; on sait que dans la convolution les moyennes et les variances s'ajoutent ; soit $E(X_n) = \frac{n}{2}$, $Var(X_n) = \frac{n}{12}$.
La fonction caractéristique de X_n réduite est donc

$$\Phi_n(t) = \exp\left(-it\frac{E(X_n)}{\sigma(X_n)}\right)\left(\frac{e^{\frac{it}{\sigma(X_n)}}-1}{\frac{it}{\sigma(X_n)}}\right)^n$$

$$= \exp\left(-it\sqrt{\frac{3}{n}}\times n\right)\left(\frac{e^{2it\sqrt{\frac{3}{n}}}-1}{2it\sqrt{\frac{3}{n}}}\right)^n = \left(e^{-it\sqrt{\frac{3}{n}}}\frac{e^{2it\sqrt{\frac{3}{n}}}-1}{2it\sqrt{\frac{3}{n}}}\right)^n$$

$$= \left(\frac{e^{it\sqrt{\frac{3}{n}}}-e^{-it\sqrt{\frac{3}{n}}}}{2it\sqrt{\frac{3}{n}}}\right)^n = \left(\frac{\sin t\sqrt{\frac{3}{n}}}{t\sqrt{\frac{3}{n}}}\right)^n$$

Corrigés des exercices :

Corrigé de l'exercice 4 :

$$\ln \Phi_n(t) = n \ln \frac{\sin t\sqrt{\frac{3}{n}}}{t\sqrt{\frac{3}{n}}}$$

Lorsque $n \to \infty$, $\ln \frac{\sin t\sqrt{\frac{3}{n}}}{t\sqrt{\frac{3}{n}}} \sim \frac{\sin t\sqrt{\frac{3}{n}}}{t\sqrt{\frac{3}{n}}} - 1$

Or $$\sin t\sqrt{\frac{3}{n}} = t\sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{t^3}{3!}\left(\sqrt{\frac{3}{n}}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right),$$

donc $$\frac{\sin t\sqrt{\frac{3}{n}}}{t\sqrt{\frac{3}{n}}} - 1 = -\frac{t^2}{2}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right);$$

et $$\ln \Phi_n(t) = n\left(-\frac{t^2}{2}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

d'où $\Phi_n(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}}$ qui est la fonction caractéristique de la loi Normale réduite. Donc $\frac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X_n)}$ tend en loi vers la variable aléatoire Normale réduite.

Corrigés des exercices :

Corrigé de l'exercice 4 :

Ceci est un cas particulier du théorème suivant : Si les variables aléatoires X_k indépendantes ont même loi de variance σ^2, la variable $Y_n = \frac{\sum_k X_k - nE(X)}{n\sigma(X)}$ converge en loi vers la loi Normale réduite.