Couple de variables aléatoires

Prof. Mohamed El Merouani

Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

2019/2020

Couple de variables aléatoires :

Définition :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

- Une application (X, Y) de Ω dans $\mathbb{R}^2$, qui à tout ω de Ω fait correspondre un couple $(X(\omega), Y(\omega))$ de $\mathbb{R}^2$, s'appelle un couple de v.a. (où X et Y sont deux variables aléatoires).
- (X, Y) s'appelle aussi v.a. à deux dimensions.

- Un couple de v.a. (X, Y) peut prendre les valeurs successives :
$(x_1, y_1); (x_1, y_2); \cdots; (x_1, y_m);\ (x_2, y_1); \cdots; (x_2, y_m); \cdots$
$\cdots; (x_i, y_j) \cdots; (x_n, y_m)$
A chaque couple (x_i, y_j) correspond une probabilité p_{ij} d'observer simultanément la valeur x_i pour X et la valeur y_j pour Y :

$$p_{ij} = P(X = x_i \text{ et } Y = y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$$

- On a : $0 \leq p_{ij} \leq 1\,;\ \forall i = 1, 2, \cdots, n\,;\ \forall j = 1, 2, \cdots, m\,;$
et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$

Fonction de répartition d'un couple de v.a. discrètes :

Définition :

On appelle fonction de répartition d'une v.a. à deux dimensions (X, Y) la fonction définie par :

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} P(X = x_i, Y = y_j)$$

Loi de probabilité marginales :

- La probabilité $P(X = x_i) = p_{i.}$ est appelée loi marginale de X. On a :

$$P(X = x_i) = p_{i.} = \sum_j p_{ij}, i = 1, 2, \cdots, n$$

- La probabilité $P(Y = y_j) = p_{.j}$ est appelée loi marginale de Y. On a :

$$P(Y = y_j) = p_{.j} = \sum_i p_{ij}, j = 1, 2, \cdots, m$$

Loi de probabilité marginales :

$X\backslash Y$	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_m	$\sum_j p_{ij}$
x_1	p_{11}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	p_{1m}	$p_{1.}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{im}	$p_{i.}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	$\cdots$	p_{nj}	$\cdots$	p_{nm}	$p_{n.}$
$\sum_i p_{ij}$	$p_{.1}$	$\cdots$	$p_{.j}$	$\cdots$	$p_{.m}$	1

Loi conditionnelle de v.a. discrètes :

- La loi conditionnelle de X sachant $Y = y_j$ est définie par :

$$P(X/Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}$$

- De même, la loi conditionnelle de Y sachant $X = x_i$ est définie par :

$$P(Y/X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)}$$

- Les variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si :

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i).P(Y = y_j)$$

$$\forall i = 1, 2, \cdots, n, \ \forall j = 1, 2, \cdots, m$$

Dans ce cas,
$P(X/Y = y_j) = P(X = x_i)$ et $P(Y/X = x_i) = P(Y = y_j)$.

- Les variables aléatoires X et Y sont donc indépendantes si :

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x).P(Y \leq y)$$

ou encore si :

$$F(x, y) = F_X(x).F_Y(y)$$

Loi de probabilités conjointes de deux v.a. continues :

Une v.a. à deux dimensions $Z = (X, Y)$ est dite continue s'il existe une application $f(x, y)$ appelée densité de probabilité conjointe du couple de v.a. (X, Y), vérifiant :

1. $f(x, y) \geq 0; \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$

Fonction de répartition d'un couple de v.a. continues :

- La fonction de répartition du couple (X, Y) est définie par :

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) du dv$$

et l'on a

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Lois marginales (Fonctions de répartition marginales) :

- Les fonctions :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dudv$$

et

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dudv$$

sont dites fonctions de répartition marginales des v.a. X et Y respectivement.

Lois marginales (Fonctions de densités marginales) :

- Les fonctions :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v)dv$$

et

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y)du$$

sont dites fonctions de densités marginales des v.a. X et Y respectivement.

Lois conditionnelles des v.a. continues :

- La densité conditionnelle de X sachant $Y = y$ est définie par :

$$f_X(x/Y = y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \quad \text{avec} \quad f_Y(y) \neq 0$$

- La densité conditionnelle de Y sachant $X = x$ est définie par :

$$f_Y(y/X = x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \quad \text{avec} \quad f_X(x) \neq 0$$

Indépendance de deux variables aléatoires continues :

- Les variables aléatoires continues X et Y sont indépendantes si :

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x).P(Y \leq y);\ \forall x,\ \forall y$$

ou

$$F(x, y) = F_X(x).F_Y(y)$$

ou encore, en dérivant deux fois par rapport à x et à y :

$$f(x, y) = f_X(x).f_Y(y)$$

Dans ce cas, $f_X(x/Y = y) = f_X(x)$ et $f_Y(y/X = x) = f_Y(y)$.