Université Abdelmalek Essaâdi
ENSA de Tétouan
Module: Probabilités et Statistique

Année universitaire : 2013/2014
Première année de cycle ingénieur
Prof. Mohamed El Merouani

Corrigés des exercices de Probabilités

Exercice 1 :
Le tableau de la loi de la variable aléatoire X est :

k	0	1	$\cdots$	m	$\cdots$	n
$P(X=k)$	p^n	$C_n^1 q p^{n-1}$	$\cdots$	$C_n^m q^m p^{n-m}$	$\cdots$	q^n

où $q = 1-p$; $E(X) = nq$ et $Var(X) = npq$

Exercice 2 :
La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2}$.
$P(X=m) = C_n^m (\frac{1}{2})^n$; $P(X \geqslant m) = (\frac{1}{2})^n \sum_{k=m}^{n} C_n^m$ et $P(X < m) = 1 - P(X \leqslant m)$.

Exercice 3 :
La variable aléatoire X_i, nombre de signes erronés dans l'i^{eme} message, suit une loi binomiale de paramètres n_i et p. La probabilité pour que l'i^{eme} message soit erroné est égale à la probabilité pour que dans les n_i signes de ce message il y ait au moins trois signes erronés

$$P(X_i \geqslant 3) = 1 - P(X_i < 3) = 1 - \sum_{j=0}^{2} C_{n_i}^j p^j (1-p)^{n_i - j}$$

La probabilité pour qu'au moins un des k messages soit erroné est égale à

$$P = 1 - \prod_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{2} C_{n_i}^j p^j (1-p)^{n_i - j}$$

Exercice 4 :
La variable aléatoire X représentant le nombre de bonnes pièces parmi les cinq pièces tirées, suit une loi hypergéométrique de paramètres $5, 6, 4$. La probabilité pour que parmi les 5 pièces m soient en bon état est égale à $P_m = \dfrac{C_6^m C_4^{5-m}}{C_{10}^5}$; d'où $P_4 = \frac{5}{21}$; $P_5 = \frac{1}{42}$; $P(X \geqslant 4) = P_4 + P_5 = \frac{11}{42}$.

Exercice 5 :
La variable aléatoire X représentant le nombre de pièces défectueuses dans le lot de contrôle, suit une loi hypergéométrique de paramètres n, a, b

$$P(A) = P(X \geqslant m) = 1 - P(X < m) = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}.$$

Exercice 6 :

1. En utilisant la formule de la loi hypergéométrique, on a :

$$P(A) = \frac{C_{100}^3 C_{400}^7}{C_{500}^{10}} = 2,0284946.10^{-1}$$

2. En utilisant une approximation de de la loi hypergéométrique par une loi binomiale,

$$P(A) \cong C_{10}^3 (0,2)^3 (0,8)^7 = 2,0132659.10^{-1}$$

Exercice 7 :
La fonction de répartition d'une loi de Weibull est :

$$F(x) = 1 - e^{-\beta x^\alpha}; (x \geqslant 0),$$

où $\beta > 0$ est une certaine constante ; α, un nombre entier positif.

1. Sa densité est $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \alpha\beta x^{\alpha-1} e^{-\beta x^\alpha}$
2. Son espérance mathématique sera $E(X) = \int_0^\infty x\alpha\beta x^{\alpha-1} e^{-\beta x^\alpha} dx$
   Soit le changement de variable : $\beta x^\alpha = y$; $x = \beta^{-\frac{1}{\alpha}} y^{\frac{1}{\alpha}}$,

$$dx = \frac{1}{\alpha} \beta^{-\frac{1}{\alpha}} y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dy;$$

$$E(X) = \int_0^\infty \alpha y e^{-y} \frac{1}{\alpha} \beta^{-\frac{1}{\alpha}} y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dy$$

$$= \beta^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^\infty y^{\frac{1}{\alpha}} e^{-y} dy = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \beta^{-\frac{1}{\alpha}}$$

   où $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$ est la seconde fonction d'Euler. Calculons, maintenant, la variance. D'abord, on cherche $E(X^2)$.

$$E(X^2) = \int_0^\infty \alpha\beta x^{\alpha+1} e^{-\beta x^\alpha} dx =$$

   En faisant le même changement d'avant, $\beta x^\alpha = y$; $x = \beta^{-\frac{1}{\alpha}} y^{\frac{1}{\alpha}}$, on obtient :

$$E(X^2) = \int_0^\infty \alpha\beta\beta^{-(1+\frac{1}{\alpha})} y^{1+\frac{1}{\alpha}} e^{-y} \frac{1}{\alpha} \beta^{-\frac{1}{\alpha}} y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dy =$$

$$= \beta^{-\frac{2}{\alpha}} \int_0^\infty y^{\frac{2}{\alpha}} e^{-y} dy = \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) \beta^{-\frac{2}{\alpha}};$$

   D'où $Var(X) = \beta^{-\frac{2}{\alpha}} \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\}^2\right]$.

Exercice 8 :
Comme X et Y sont indépendantes, on a : $f(x,y) = f_1(x).f_2(y)$
On obtient, la fonction de densité conjointe du couple (X,Y) :

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}; \quad \text{pour} \quad y \in (0,1)$$

De même $F(x,y) = F_1(x).F_2(y)$ (puisque X et Y sont indépendantes), alors sa fonction de répartition sera :

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad y < 0; \\ y\left[\Phi(x\sqrt{2})\right] & \text{pour} \quad 0 \leqslant y < 1; \\ \Phi(x\sqrt{2}) & \text{pour} \quad y \geqslant 1 \end{cases}$$

Exercice 9 :
X, le nombre d'apparitions de l'événement A dans n expériences indépendantes, est mis sous la forme $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où X_i est l'indicatrice de l'événement A dans l'$i^{\text{ème}}$ expérience, c'est-à-dire :

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si, dans l'}i\text{-ème expérience l'événement est réalisé;} \\ 0, & \text{si, dans l'}i\text{-ème expérience l'événement n'a pas été réalisé} \end{cases}$$

$$E(X_i) = p; \quad Var(X_i) = pq$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np; \quad Var(X) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = npq$$

Exercice 10 :
D'une manière analogue à l'exercice précédent $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où X_i est l'indicatrice de l'événement A dans l'$i^{\text{ème}}$ expérience.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i,$$

et sa variance est :

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i.$$

Exercice 11 :
la fréquence de l'événement A est $Y = \frac{X}{n}$, où X est le nombre d'apparitions de l'événement A. Son espérance mathématique est $E(Y) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{1}{n}np = p$, sa variance est $Var(Y) = \frac{npq}{n^2}$, où $q = 1 - p$, la marge des valeurs pratiquement possibles de la fréquence Y est

$$E(Y) \pm 3\sigma_Y = p \pm 3\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Exercice 12 :
Considérons le modèle physique de l'apparition d'une loi hypergéométrique : tirage de n boules d'une urne contenant a boules blanches et b noires, X est le nombre de boules blanches extraites. Représentons n tirages d'une boule comme n expériences dont chacune peut donner lieu à l'événement A =$\{$boule blanche$\}$. Représentons la variable X comme la somme des X_i, variables indicatrices de l'événement A dans l'$i^{\text{ème}}$ expérience : $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Les variables aléatoires X_i sont dépendantes, mais la formule de l'addition des espérances mathématiques est applicable :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i); \qquad E(X_i) = \frac{a}{a+b}; \qquad E(X) = \frac{na}{a+b};$$

La variance de la somme des variables aléatoires X_i est :

$$Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{i \neq j} Cov(X_i, X_j)$$

$$Var(X_i) = pq = \frac{a}{a+b}\frac{a}{a+b} = \frac{ab}{(a+b)^2};$$

$$\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{nab}{(a+b)^2}.$$

$$Cov(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j)$$

Le produit des variables indicatrices X_iX_j de l'événement A dans les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ expériences n'est égal à l'unité que si $X_i = 1$, $X_j = 1$, c'est-à-dire que si l'événement A se produit dans l'$i^{\text{ème}}$ et la $j^{\text{ème}}$ expériences. La probabilité de ceci est égale à $\frac{a}{a+b}\frac{a-1}{a+b-1}$; c'est également la valeur de l'espérance mathématique

$$E(X_iX_j) = \frac{a}{a+b}\frac{a-1}{a+b-1}.$$

D'où :

$$Cov(X_i, X_j) = \frac{a}{a+b}\frac{a-1}{a+b-1} - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2$$

Finalement,

$$Var(X) = \frac{nab}{(a+b)^2} + \left(\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2\right) = \frac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$$

Exercice 13 :
On trouve, d'après les formules de l'exercice précédent,

$$E(X) = 2,5 \quad \text{et} \quad Var(X) = \frac{35}{44} \approx 0,795.$$

Exercice 14 :
Mettons la variable aléatoire X sous la forme d'une somme

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_k = \sum_{i=1}^{k} X_i,$$

où X_1 est le nombre d'expériences jusqu'à la première apparition de l'événement A ; X_2 est le nombre d'expériences entre sa première et sa deuxième apparition ;$\cdots$; X_k est le nombre d'expériences de la $(k-1)$-ième et la k-ième apparition.
Chaque variable aléatoire X_i possède une répartition géométrique qui débute par l'unité et ses caractéristiques sont

$$E(X_i) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad Var(X_i) = \frac{1-p}{p^2}$$

En appliquant les formules d'addition des espérances mathématiques et des variances, on obtient :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} E(X_i) = kp; Var(X) = \sum_{i=1}^{k} Var(X_i) = \frac{k(1-p)}{p^2}; \sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \frac{\sqrt{k(1-p)}}{p}$$

Exercice 15 :
D'après la solution de l'exercice précédent, l'espérance mathématique du nombre de pièces mises à l'essai est $\mu_X = kp$, et sa variance est $\sigma_X^2 = \frac{k(1-p)}{p^2}$.
D'où son écart type sera $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \frac{\sqrt{k(1-p)}}{p}$

Exercice 16 :

1. Représentons X comme la somme de n variables aléatoires $X_i (i = 1, \cdots, n)$ où X_i est la variable indicatrice de l'événement A dans l'$i^{\text{ème}}$ expérience :

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si l'événement } A \text{ apparaît dans l'}i^{\text{ème}} \text{ expérience;} \\ 0, & \text{si l'événement } A \text{ n'apparaît pas dans l'}i^{\text{ème}} \text{ expérience} \end{cases}$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i; \quad E(x) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i);$$

$E(X_i) = p_i$, où p_i est la probabilité de l'apparition de l'‘événement A dans l'$i^{\text{ème}}$ expérience. Ainsi,

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

En particulier, si $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p$, alors

$$E(X) = np.$$

2. D'après la formule d'addition des variances $Var(X) = Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n}(VarX_i)$ (puisque les variables X_i sont indépendantes).
La variance de la variable indicatrice de l'événement A dans l'$i$ème expérience est égale à $p_i(1 - p_i)$; donc $Var(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(1 - p_i)$.
Dans le cas particulière où $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p$, $Var(X) = np(1 - p)$.

3. $X = \sum_{i=1}^{n}$, où X_i est la variable indicatrice de l'événement A dans l'i-ième expérience. Dans le cas général, la variance de la somme des variables aléatoires :

$$Var(X) = Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2 \sum_{i<j}^{n} Cov(X_i, X_j),$$

où $Cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$.
La variable $X_i X_j$ ne se transforme en unité que si $X_i = 1$ et $X_j = 1$ (c'est-à-dire si dans l'i-ème et la j-ème expériences l'événement A est apparu).
$E(X_i X_j) = p_{ij}$, où p_{ij} est la probabilité pour que dans l'i-ième et la j-ième expériences apparaît l'événement A.
$Cov(X_i, X_j) = p_{ij} - p_i p_j$; on en tire $Var(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(1 - p_j) + 2 \sum_{i<j}(p_{ij} - p_i p_j)$.
De la sorte, pour obtenir la variance du nombre d'apparitions de l'événement dans n expériences dépendantes, il ne suffit pas de connaîttre la probabilité p_i de l'apparition de l'événement dans chacune des expériences ; il faut encore connaître la probabilité p_{ij} pour que l'événement apparaît dans chaque couple d'expériences.
En particulier, lorsque $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p$, p_{ij} ne dépend pas de i et de j, elle est égale à P, el la formule précédente devient

$$Var(X) = np(1 - p) + n(n - 1)(P - p^2),$$

où $P = p_{ij}$ est la probabilité de l'apparition de l'événement dans un couple d'expériences quelconque.

Exercice 17 :
$X = \sum_{i=1}^{k} X_i$, où

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si l'}i\text{-ième boule tirée est blanche;} \\ 0, & \text{si elle est noire} \end{cases}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} E(X_i) = kp,$$

où p est la probabilié pour que la boule tirée soit blanche

$$p = \frac{a}{a+b}; \quad E(X) = \frac{ka}{a+b}.$$

La variance de la variable aléatoire X s'obtient comme celle du nombre d'apparitions de l'événement dans k expériences dépendantes (exercice précédent, question 3) :

$$Var(X) = kp(1-p) + k(k-1)(P - p^2).$$

Calculons P, la probabilité pour que deux boules quelconques tirées (l'i-ième et la j-ième) soient blanches : $P = \frac{a}{a+b}\frac{a-1}{a+b-1}$. En portant cette expression et $p = \frac{a}{a+b}$ dans la formule de la variance, on obtient :

$$Var(X) = \frac{kab}{a+b} + k(k-1)\left(\frac{a}{a+b}\frac{a-1}{a+b-1} - \frac{a^2}{(a+b)^2}\right).$$

Exercice 18 :
Démontrons d'abord que la somme de deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes qui suivent des lois de Poisson de paramètres respectives λ_1 et λ_2, suit aussi une loi de Poisson dont le paramètre est la somme des paramètres, c'est-à-dire $\lambda_1 + \lambda_2$. À cet effet, calculons la probabilité pour que $X_1 + X_2 = k, (k = 0, 1, 2, \cdots)$.

$$P(X_1 + X_2 = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X_1 = i)P(X_2 = k-i) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}.$$

Compte tenu que $C_k^i = \frac{k!}{(i!)(k-i)!}$, mettons cette expression sous la forme

$$\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k} C_k^i \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)},$$

or, ceci est une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
Ainsi, nous avons démontré que la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux des lois de Poisson, suit également une loi de Poisson. L'extension de ce résultat sur un nombre quelconque de termes se fait par récurrence.

Exercice 19 :
L'inégalité de Bienaymé-Tchébychev implique :

$$P(|X - \mu| \geqslant 3\sigma) \leqslant \frac{Var(X)}{(3\sigma)^2} = \frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2} = \frac{1}{9};$$

$$\text{donc} \qquad P(|X - \mu| \geqslant 3\sigma) \leqslant \frac{8}{9};$$

Ainsi, toute variable aléatoire s'écarte de son esérance mathématique à moins de 3σ avec une probabilité non inférieure à $\frac{8}{9}$ [1] .

1. C'est le cas extrême, le plus défavorable. Dans la pratique, pour les variables aléatoires qui se présentent dans le cas courants cette probabilité est bien plus proche de l'unité ; par exemple, pour la loi normale elle est égale à 0,997 ; pour la loi uniforme, à l'unité ; pour la loi exponentielle, à 0,982.

Exercice 20 :

$$a = E(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}.n.1,5 = 1,5;$$

$$Var(Y) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{n}{n^2}\frac{1}{12} = \frac{1}{12n};$$

$$\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)} = \frac{1}{2\sqrt{3n}}.$$

La valeur maximale pratiquement possible de l'erreur est $3\sigma_Y$.

Exercice 21 :

1. $E\left(Y(n)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$. Toutes les pesées étant réalisées dans les conditions identiques, $E(X_i) = a; \forall i$; il vient donc

$$E\left(Y(n)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a = \frac{na}{n} = a.$$

En considérant que les erreurs des pesées isolées sont indépendantes, on trouve la variance de $Y(n)$:

$$Var\left(Y(n)\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

2. Le nombre de pesées se calcule d'après la condition

$$\sigma\left(Y(n)\right) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{10};\ \text{donc}\ n = 100$$

Exercice 22 :

On note f la densité de probabilité de la variable aléatoire $X \sim N(\mu_X, \sigma_X)$.

1. Soit g la densité de probabilité de la variable aléatoire $Y = |X|$, alors,

$$g(y) = f(-y) + f(y);\ \text{pour}\ y > 0;$$

$$g(y) = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\left[\exp\left(-\frac{(y+\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right) + \exp\left(-\frac{(y-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right)\right]\ \text{pour}\ y > 0.$$

2. Si $\mu_X = 0$, alors

$$g(y) = \frac{2}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\left[\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_X^2}\right)\right]\ \text{pour}\ y > 0.$$

• Cherchons, maintenant, $h(z)$ la densité de probabilité de la variable aléatoire $Z = X^2$:

On rappelle que dans ce cas $f(x) = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right)$; $Y = X^2$.

La fonction inverse de $y = x^2$ a deux valeurs : $x_1 = +\sqrt{y}$ et $x_2 = -\sqrt{y}$. Donc, d'après une formule vu dans le cours, on a : $h(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}f(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}}f(-\sqrt{y})$

D'où $h(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\exp\left(-\frac{y}{2\sigma_X^2}\right) + \exp\left(-\frac{y}{2\sigma_X^2}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{y}}\left[\exp\left(-\frac{y}{2\sigma_X^2}\right)\right]$; pour $y > 0$

Pour $y = 0$, la densité $h(y)$ possède une discontinuité de seconde espèce (tend vers l'infini).

Exercice 23 :

Introduisons les notations $U = |X|$ et $V = |Y|$. Les densités de ces varaiables $f_1(u)$ et $f_2(v)$ sont égales respectivement à

$$f_1(u) = \begin{cases} \frac{2}{\sigma_X\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_X^2}\right) & \text{pour } u > 0; \\ 0 & \text{pour } u \leqslant 0; \end{cases}$$

$$f_2(v) = \begin{cases} \frac{2}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_Y^2}\right) & \text{pour } v > 0; \\ 0 & \text{pour } v \leqslant 0; \end{cases}$$

Compte tenu de la formule de la loi de la somme de deux variables aléatoires non négatives, on a

$$g(z) = \int_0^z f_1(u) f_2(z-u) du; (z > 0)$$

ou

$$g(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \frac{1}{\sigma_X\sigma_Y} \int_0^z \exp\left[-\left(\frac{u^2}{2\sigma_X^2} + \frac{z^2}{2\sigma_Y^2} - \frac{zu}{\sigma_Y^2} + \frac{u^2}{2\sigma_Y^2}\right)\right] du.$$

Cette intégrale s'exprime à l'aide de la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite $\Phi(x)$; à cet effet il faut dégager à l'exposant de la drenière expression de $g(z)$ le carré parfait. Après des transformations, on obtient

$$g(z) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}} \exp\left[\frac{-z^2}{2(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}\right] \left[\Phi\left(\frac{z\sigma_Y}{\sigma_X\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}}\right) + \Phi\left(\frac{z\sigma_X}{\sigma_Y\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}}\right)\right].$$

Exercice 24 :

I.- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, bien que non monotone dans le sens courant du mot (avec $x = 0$ elle croît en saut de $-\infty$ à $+\infty$), sa fonction inverse est univoque ; donc, le problème peut se résoudre de la facon par laquelle on la résout pour les fonctions monotones :

$$g(y) = f\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2},$$

pour les valeurs de y qui peuvent être inverses à l'ensemble donné des valeurs possibles de x.

II.-En tenant compte que malgré l'allure discontinue de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, la fonction inverse $y \mapsto \frac{1}{y}$ est univoque et en résolvant le problème d'après les règles prévues pour une fonction monotone, on obtient

$$g(y) = \frac{1}{\pi\left[1 + \left(\frac{1}{y}\right)^2\right]}\frac{1}{y^2} = \frac{1}{\pi(1+y^2)}; \ (-\infty < y < \infty),$$

c'est-à-dire la loi de la variable inverse d'une variable aléatoire qui suit une loi de Cauchy, obéit également à la loi de Cauchy.

III.- On a $x \mapsto \frac{1}{x}$, sa fonction inverse $y \mapsto \frac{1}{y}$ est univoque. en vertu de la règle générale

$$g(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2y^2\sigma^2}\right\}\frac{1}{y^2} = \frac{1}{\sigma y^2\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2y^2\sigma^2}\right\}.$$

En $y = 0$ la densité $g(y)$ présente une discontinuité de seconde espèce.

Il est curieux de noter que la variable aléatoire Y ne possède pas d'espérance mathématique : l'intégrale correspondante est divergente.

Exercice 25 :
Examinons d'abord le cas particulier $\sigma_X = \sigma_Y = 1$. En vertu de l'exercice 2 de la série 3 de T.D.

$$\begin{aligned} g(z) &= -\int_{-\infty}^{0} x\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2+z^2x^2)\right\}dx + \int_{0}^{\infty} x\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2+z^2x^2)\right\}dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}(1+z^2)\right\}xdx = \frac{1}{\pi(1+z^2)}, \qquad \text{(Loi de Cauchy).} \end{aligned}$$

Dans le cas général, le rapport $Z = \frac{Y}{X}$ peut s'écrire $Z = \frac{Y_1\sigma_Y}{X_1\sigma_X}$, où les variables $X_1 = \frac{X}{\sigma_X}$ et $Y_1 = \frac{Y}{\sigma_Y}$ qui suivent déjà des lois normales de variances égale à l'unité ; donc

$$g(z) = \frac{1}{\pi\left[1+(\sigma_X z)^2\sigma_Y^{-2}\right]}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}.$$

En particulier, si $\sigma_X = \sigma_Y$,

$$g(z) = \frac{1}{\pi(1+z^2)}.$$