Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2019/2020
S.M.A. Semestre 6

T.D. de Probabilités 2
Série n° 1

Exercice 1 :
Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Montrer que :

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille (finie ou infinie) d'événements de $\mathcal{A}$, alors $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.
3. Si $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$, alors $A - B \in \mathcal{A}$ et $A\Delta B \in \mathcal{A}$.

Exercice 2 :
Montrer que l'intersection de deux tribus est une tribu, mais la réunion de deux tribus n'est pas, en général, une tribu.

Exercice 3 :
Soit Ω un ensemble, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que :

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{C} \Rightarrow \sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{C})$$

où $\sigma(\mathcal{A})$ et $\sigma(\mathcal{C})$ sont respectivement les tribus engendrées par $\mathcal{A}$ et par $\mathcal{C}$.

Exercice 4 :

1. Montrer que si A et B sont deux événements indépendants tels que A entraîne B, alors on a : ou $P(B) = 1$ ou $P(A) = 0$.
2. Montrer que si A est indépendant de lui-même, alors $P(A) = 0$ ou 1.
3. Montrer que $P(A) = 0$ ou 1, alors A est indépendant de tout événement.
4. En déduire que la relation d'indépendance n'est pas transitive.

Exercice 5 :
Une urne A contient 2 boules blanches et 3 noires, une autre urne B contient 4 boules blanches et 3 noires ; on tire au hasard une boule de l'urne A et sans la voir on la met dans B ; puis, on tire une boule de B et elle est noire. Quelle est la probabilité que la boule passée de A en B était blanche ?

Exercice 6 :
Soit l'espace probabilisable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ où α est un réel positif non nul.
Pour tout événement $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, on pose $P(A) = \int_A f(x)dx$. Montrer que P est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

Exercice 7 :
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit X une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

1. Montrer que X^2 et $\frac{1}{X}$ si $\{X = 0\} = \emptyset$ sont aussi des v.a.
2. Soient maintenant a et b deux constantes réelles. Montrer que $aX + b$ est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
3. Soit F la fonction de répartition de X. Calculer les fonctions de répartition de $|X|$ et de $aX + b$.

Exercice 8 :
Sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, on définit la v.a. $\mathbb{I}_A$ indicatrice d'un événement $A \in \mathcal{A}$, par : $\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$
Donner la fonction de répartition de l'indicatrice $\mathbb{I}_A$ d'un événement A dont la probabilité est égale à p.

Exercice 9 :
On donne la v.a. continue X de densité de probabilité f_X. On considère la v.a. $Y = kX$ avec k est un réel positif non nul. Trouver la fonction de densité f_Y de Y et vérifier que c'est bien une densité de probabilité.

Exercice 10 :
Supposons que la v.a. X représentant le point donné par un dé. Quelle est la loi de probabilité et la fonction de répartition de la v.a. $Y = 2 + X^2$.

Exercice 11 :
On dit qu'une v.a. X est distribuée symétriquement autour de a si

$$P(X \geqslant a + x) = P(X \leqslant a - x), \ \forall x.$$

Soit X une v.a. symétrique autour de a. Montrer que :

1. Si F est la fonction de répartition de X, on a : $F(a - x) = 1 - F(a + x) + P(X = a + x)$.
2. Si f est la fonction de densité de la v.a. continue X, on a : $f(a - x) = f(a + x)$.
3. E(X)=a.