Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2019/2020
Master M.A.F.
Semestre 2

T.D. de Méthodes de Monté-Carlo
Corrigés de la série n° 3

Exercice 1 :
La loi de probabilité de X peut s'écrire comme composition de deux lois de probabilités de deux v.a. uniformes X_1 et X_2 que l'on sait simuler telles que :

$$p_i = P(X = x_i) = \alpha P(X_1 = j) + (1 - \alpha)P(X_2 = k)$$

avec $0 < \alpha < 1$. On prend $\alpha = 0,5$, c'est-à-dire :

$$p_i = 0,5P(X_1 = j) + 0,5P(X_2 = k)$$

Alors $P(X_1 = j) = \frac{0,05}{0,5} = 0,1$ pour $j = 1, \cdots, 10$
et

$$P(X_2 = k) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k = 0, \cdots, 5 \\ \frac{0,15}{0,5} - 0,1 = 0,2 & \text{pour } k = 6, \cdots, 10 \end{cases}$$

Donc pour simuler X, on génère U suivant la loi uniforme puis, on prend X comme loi uniforme discrète sur $\{0, \cdots, 10\}$ si $U < 0,5$ et comme loi uniforme discrète sur $\{6, \cdots, 10\}$ sinon :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X_1 = j)$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$P(X_2 = k)$	0	0	0	0	0	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

Donc l'algorithme correspondant sera :

Générer $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$
  Si $U < 0,5$, alors X suit la loi uniforme discrète sur $\{1, \cdots, 10\}$
  Sinon, X suit la loi uniforme discrète sur $\{6, \cdots, 10\}$
Sortir X

Exercice 2 :
On appelle P la loi de la v.a. discrète X donnée par :

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

On veut faire $P = \frac{1}{2}Q^{(1)} + \frac{1}{2}Q^{(2)}$
$p_j = \frac{1}{2}q_j^{(1)} + \frac{1}{2}q_j^{(2)}$, pour $j = 1, 2, 3$
Vérification du lemme : $p_3 = \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ et $p_3 + p_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$
avec lequel on fait $i = 3$; $j = 2$. On choisit $Q^{(1)}$ de manière qu'elle se concentre en 2 et 3, et pour que 3 prend sa masse de P à partir $Q^{(1)}$, c'est-à-dire : $p_3 = \frac{1}{2}q_3^{(1)}$, $q_2^{(1)} = 1 - q_3^{(1)}$
$\Rightarrow q_3^{(1)} = \frac{2}{5}$; $q_2^{(1)} = \frac{3}{5}$; $q_1^{(1)} = 0$.
Dans ce cas, on obtient immédiatemment $Q^{(2)}$,

$p_2 = \frac{1}{2}q_2^{(1)} + \frac{1}{2}q_2^{(2)} \Rightarrow \frac{1}{2}q_2^{(2)} = \frac{1}{5}$
$\Rightarrow q_2^{(2)} = \frac{2}{5}$ et $q_1^{(2)} = 1 - q_2^{(2)} = \frac{3}{5}$ et $q_3^{(2)} = 0$.
Donc, $Q^{(1)} = (0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ et $Q^{(2)} = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0)$
d'où, la décomposition :

1	$\frac{3}{10} = \frac{1}{2}(0 + \frac{3}{5})$
2	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\frac{3}{5} + \frac{2}{5})$
3	$\frac{1}{5} = \frac{1}{2}(\frac{2}{5} + 0)$

par suite :

	1	2
i	3	2
j	2	1
q_i	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

Exercice 3 :
Soit la densité conjointe $f(x,y) \propto C_n^x y^{x+\alpha-1}(1-y)^{n-x+\beta-1}$ pour $x = 0, 1, \cdots, n\,; 0 \leqslant y \leqslant 1$.
On remarque que l'on peut proposer une loi binomiale de paramètres (n, y) pour $f(x/y)$ et une loi bêta de paramètres $(x+\alpha, n-x+\beta)$ pour $f(y/x)$.
Donc, on peut appliquer un algorithme de Gibbs pour obtenir des réalisations de $f(x)$, la loi marginale de x en simulant alternativement une réalisation x^* d'une binomiale de paramètres (n, y^*), où y^* est la valeur courante de y obtenue à l'étape précédente, puis une nouvelle réalisation x d'une bêta de paramètres $(x^* + \alpha, n - x^*)$.
Il se trouve qu'ici la loi marginale est accessible. En effet,

$$f(x) \propto \int_0^1 f(x,y)dy \propto \int_0^1 C_n^x y^{x+\alpha-1}(1-y)^{n-x+\beta-1}dy \propto C_n^x \frac{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n-x+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+n)}$$

L'algorithme de l'échantillonnage de Gibbs, sera :
`Choisir une valeur initiale` $Y_0, j = 1$
`Répéter`
  $X_j \sim$ `Binomiale`(n, Y_{j-1})
  $Y_j \sim$ `bêta`$(X_j + \alpha, n - X_j + \beta)$
`j=j+1`

Exercice 4 :
Soit $f(x,y) \propto xye^{-xy}$, pour $(x,y) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$. On a :

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} \propto f(x,y) \propto ye^{-xy}$$

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} \propto f(x,y) \propto xe^{-xy}$$

Donc,

$$X/Y \sim \mathcal{E}xp(Y)$$
$$Y/X \sim \mathcal{E}xp(X)$$

et l'algorithme de l'échantillonnage de Gibbs, sera :
`Choisir une valeur initiale` $Y_0, j = 1$
`Répéter`
  $X_j \sim \mathcal{E}xp(Y_{j-1})$
  $Y_j \sim \mathcal{E}xp(X_j)$
`j=j+1`

Exercice 5 :
Soit la densité conjointe de (x_1, x_2) est proportionnelle à

$$\pi(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \exp\left(-x_1(1+x_2^2)\right)$$

1. D'abord, rappelons l'échantillonnage de Gibbs pour ce cas :
   Pour $(x_1, x_2) \in (0, \infty) \times (-\infty, \infty)$, on a :

$$\pi(x_1/x_2) = \frac{\pi(x_1, x_2)}{\pi(x_2)} \propto \pi(x_1, x_2) \propto \exp(-x_1(1+x_2^2))$$

$$\pi(x_2/x_1) \propto \pi(x_1, x_2) \propto \exp(-x_1 x_2^2)$$

   par conséquent,

$$X_1/X_2 \sim \mathcal{E}xp(1+X_2^2)$$
$$X_2/X_1 \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 = \frac{1}{2X_1}\right)$$

   et l'échantillonnage de Gibbs sera :
   `Choisir la valeur initiale` $X_2^0, j = 1$
   `Répeter`
   `Générer` $X_1^j \sim \mathcal{E}xp(1+X_2^{j-1})$
   `Générer` $X_2^j \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 = \frac{1}{2X_1^j}\right)$
   `j=j+1`
   Estimons ou calculons, maintenaint la moyenne de x_1 ou plutôt de X_1 à partir d'un échantillon simulé selon l'échantillonnage de Gibbs.
   Soit $I = E(X_1)$ où $X_1 \sim \mathcal{E}xp(1+X_2^2)$
   On choisit une valeur initiale X_2^0, $j = 1$,
   on génère $X_1^j \sim \mathcal{E}xp(1+(X_2^{j-1})^2)$
   Alors, on peut prendre pour l'estimateur de I, comme $\hat{I}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_1^j$
   où les X_1^j sont des valeurs simulées et suivant une loi $\mathcal{E}xp(1+(X_2^{j-1})^2)$.
   Mais, un calcul directe en utilisant les approximations utilisées (comme en Statistique Bayesienne) au-dessus dans la recherche de l'échantillonneur de Gibbs,

$$E(X_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \pi(x_1) dx_1 = \int_0^{+\infty} x_1 \frac{\pi(x_1, x_2)}{\pi(x_2/x_1)} dx_1$$

   car $x_1 \in (0, \infty)$,
   et d'après les relations de proportionalité vues en haut :

$$\begin{aligned} E(X_1) &\approx \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} x_1 \frac{\exp(-x_1(1+x_2^2))}{\exp(-x_1 x_2^2)} dx_1 \\ &\approx \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} x_1 e^{-x_1} dx_1 \end{aligned}$$

   On trouve $E(X_1) \approx \frac{1}{\pi}$
2. L'algorithme de Metropolis-Hastings correspond au cas précédent (algorithme de Gibbs) avec distribution de test (appelée aussi loi de proposition ou densité de transition) symétrique, c'est-à-dire $q(x, y) = q(y, x)$ avec les simplifications correspondantes.

Soit $\pi(x,y) = \frac{1}{\pi}\exp(-x(1+y^2))$ avec $x \in (0,\infty)$ et $y \in (-\infty,\infty)$.
D'après 1°) on a :

$$x/y \sim \mathcal{E}xp(1+y^2)$$

$$y/x \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 = \frac{1}{2x})$$

Le problème sera de choisir q, qui est en principe, arbitraire à condition qu'elle assure la convergence. Habituellement, on choisit des distributions de test symétriques et de simulation facile. Par exemple, dans le cas continue, on choisit des lois normales.
$-\infty < y < \infty$, $\pi(y) = \sqrt{\frac{x}{\pi}}\exp(-xy^2) \propto \sqrt{x}\exp(-xy^2)$
$0 < x < \infty$, $\pi(x) = (1+y^2)\exp(-x(1+y^2))$
Donc $\dfrac{\pi(y)}{\pi(x)} \propto \dfrac{\sqrt{x}\exp(x)}{1+y^2}$
Alors, $\alpha(x,y) = \min\{1, \dfrac{\sqrt{x}\exp(x)}{1+y^2}\}$
Soit $q(x,y)$ une fonction de transition symétrique, i.e. $q(x,y) = q(y,x)$, par conséquent, en supposant $X_n = x$, l'algorithme de Metropolis-Hastings donne les transitions de X_n à X_{n+1}, comme suit :

`Générer` $y \sim q(x,Y)$
`si` $\pi(x)q(x,y) > 0$,
    $\alpha(x,y) = \min\{1, \frac{\pi(y)}{\pi(x)}\} = \min\{1, \frac{\sqrt{x}\exp(x)}{1+y^2}\}$
`Sinon`
    $\alpha(x,y) = 1$
`Faire` $X_{n+1} = y$ `avec probabilité` $\alpha(x,y)$
`sinon,` $X_{n+1} = x$

Exercice 6 :
On considère la densité

$$f(x,y) = C\exp\left(-\frac{y^2}{2} - \frac{x^2(1+y+y^2)}{2}\right)$$

1. Vu l'expression de la densité conjointe,

$$f(x/y) = C_y \exp\left(-\frac{x^2(1+y+y^2)}{2}\right),$$

   donc, $X/Y = y \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{1+y+y^2}\right)$.
   De même, l'écriture

$$f(x,y) = C_x \exp\left(-\frac{1+x^2}{2}\left(y + \frac{x^2}{2(1+x^2)}\right)^2\right)$$

   montre que $Y/X = x \sim \mathcal{N}\left(-\frac{x^2}{2(1+x^2)}, \frac{1}{1+x^2}\right)$.
2. Un échantillonneur de Gibbs de loi cible f est alors très facile à construire puisqu'il suffit de simuler des variables Normales.

L'algorithme de l'échantillonnage de Gibbs, sera :

```
Choisir une valeur initiale Y_0, j = 1
Répéter
    X_j ~ N(0, 1/(1+Y_{j-1}+Y_{j-1}^2))
    Y_j ~ N(-X_j^2/(2(1+X_j^2)), 1/(1+X_j^2))
j=j+1
```

`Choisir une valeur initiale` $Y_0, j = 1$

`Répéter`

$X_j \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{1+Y_{j-1}+Y_{j-1}^2}\right)$

$Y_j \sim \mathcal{N}\left(-\frac{X_j^2}{2(1+X_j^2)}, \frac{1}{1+X_j^2}\right)$

`j=j+1`