**Université Abdelmalek Essaâdi**
**Faculté des Sciences de Tétouan**
**Département de Mathématiques**

**Année universitaire : 2019/2020**
**Master M.A.F.**
**Semestre 2**

---

# T.D. de Méthodes de Monté-Carlo
# Corrigés de la série n° 1

---

**Exercice 1** :
Calculons d'abord la fonction de répartition de $X$, pour tout $x$ réel, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$$

qui s'inverse sans problème, on peut donc générer $X$ en commençant par générer $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ et après on prend $X = F^{-1}(U) = \tan\left(\pi(U - \frac{1}{2}\right)$.
L'algorithme est :

`Générer` $U \sim \mathcal{U}(0,1)$
`Faire` $X = \tan(\pi(U - 0.5))$
`Sortir` $X$

**Exercice 2** :

1. Pour tout $x > 0$, on a donc, en prenant pour $g$ une exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{\exp(-x)} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2x}{2}\right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{(x-1)^2 - 1}{2}\right) \\
&\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(\frac{1}{2}\right) = c
\end{aligned}$$

Il est facile de simuler suivant la densité d'une exponentielle $\mathcal{E}(1)$

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

L'algorithme de rejet correspondant est donc :

`Jusqu'à ce que` $U \leqslant \frac{f(X)}{cg(X)} = \exp\left(-\frac{1}{2}(X-1)^2\right)$
`Générer` $X \sim \mathcal{E}(1)$
`Générer` $U \sim \mathcal{U}(0,1)$
`Sortir` $X$

2. Il est claire que pour que l'algorithme soit le plus efficace, il faut que $c$ soit la plus petite possible afin que l'on accepte plus facilement les v.a. générées. Souvent la borne $c$ sera appelée l'efficacité de l'algorithme car elle correspond au nombre moyen de v.a. à générer pour en accepter une comme étant générée selon la loi d'intérêt. La probabilité d'acceptation est donc égale à $\frac{1}{c} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\pi}e^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2e}}$

**Exercice 3** :
Soit $G$ fonction de répartition de la v.a. $\max(X_1, \cdots, X_n)$ est :

$$\begin{aligned} G(x) &= P(\max(X_1, \cdots, X_n) \leqslant x) \\ &= P(X_1 \leqslant x, \cdots, X_n \leqslant x) \\ &= P(X_1 \leqslant x) \cdots P(X_n \leqslant x) \text{ (car les } X_i \text{ sont indépendantes)} \\ &= [F(x)]^n \text{ (car les } X_i \text{ sont i.d. de même fonction de répartition F)} \end{aligned}$$

Cherchons l'inverse de $G$ :

$$\begin{aligned} G(x) = u &\Leftrightarrow [F(x)]^n = u \\ &\Leftrightarrow F(x) = \sqrt[n]{u} \\ &\Leftrightarrow x = F^{-1}(\sqrt[n]{u}) \end{aligned}$$

L'algorithme d'inversion est :
`Générer` $U \sim \mathcal{U}(0,1)$
`Faire` $X = F^{-1}(\sqrt[n]{U})$
`Sortir` $X$

**Exercice 4** :
Soit $X$ une variable aléatoire continue admettant pour fonction de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^\beta} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $\alpha$ et $\beta$ des paramètres $> 0$. C'est la loi de Weibull, sa fonction de répartition sera :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x^\beta} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On cherche ensuite le pseudo-inverse de $F$.
Si $u \in [0,1]$, on cherche $x$ tel que $F(x) = u$.
Ce qui revient à $x = \left[-\frac{1}{\alpha}\ln(1-u)\right]^{\frac{1}{\beta}}$
Pour simuler suivant la loi de $X$, on tire $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ et on renvoie $\left[-\frac{1}{\alpha}\ln(1-U)\right]^{\frac{1}{\beta}}$.
Comme $1 - U \sim \mathcal{U}([0,1])$, l'algorithme d'inversion est :
`Générer` $U \sim \mathcal{U}(0,1)$
`Faire` $X = \left[-\frac{1}{\alpha}\ln(U)\right]^{\frac{1}{\beta}}$
`Sortir` $X$

**Exercice 5** :
Soit $a > 0$ donné et $f$ la fonction $f(x) = \mathbb{I}_{[0,a]}(x)e^{-x}$

1. On calcule $\int_0^a e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^a = 1 - e^{-a}$
   Donc, pour que $kf$ soit une densité de probabilité, on prend $k = \frac{1}{1-e^{-a}}$

2. Pour tout $x \in [0,a]$ ; $e^{-x} \leqslant 1$.
   Donc, on peut prendre $c_1 = ak$ pour que $kf(x) \leqslant c_1 \frac{\mathbb{I}_{[0,a]}(x)}{a}, x \in \mathbb{R}$
3. Pour tout $x \geqslant 0$ ; $\mathbb{I}_{[0,a]}(x) \leqslant \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)$.
   Donc, on peut prendre $c_2 = k$ pour que $kf(x) \leqslant c_2 \mathbb{I}_{[0,+\infty[} e^{-x}, x \in \mathbb{R}$
4. La loi uniforme sur $[0,a]$ a pour densité $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{a}\mathbb{I}_{[0,a]}(x)$.
   La loi exponentielle de paramètre 1 a pour densité $x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)e^{-x}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}, kf(x) \leqslant ak \times \frac{\mathbb{I}_{[0,a]}(x)}{a}$, (*)
   et on a égalité pour $x = 0$ (donc, on ne trouve pas plus petite constante $k'$ telle que $kf(x) \leqslant k' \frac{\mathbb{I}_{[0,a]}(x)}{a}$.
   La méthode de rejet pour simuler suivant la densité $kf$ (en proposant des variables de loi uniforme sur $[0,a]$) basée sur l'inégalité (*) effectue en moyenne $ak$ opérations.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}, kf(x) \leqslant k \times \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)e^{-x}$, (**)
   et on a égalité pour $x = 0$ (donc on ne trouve pas plus petite constante $k''$ telle que $kf(x) \leqslant k'' \times \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)e^{-x}$).
   La méthode de rejet pour simuler suivant la densité $kf$ (en proposant des variables de loi uniformes sur $[0,a]$) basée sur l'inégalité (**) effectue en moyenne $k$ opérations.
   Si $a \leqslant 1$, on choisira donc la méthode basée sur (*) et si $a > 1$, on choisira la méthode basée sur (**).

**Exercice 6** :

1. La méthode de rejet pour des variables discrètes fonctionne de la même façon que pour des variables continues. Il s'agit, donc, de trouver une constante $c$ telle que, pour tout entier naturel $k$

$$\frac{P(X=k)}{P(Y=k)} \leqslant c \Leftrightarrow \frac{e^{-\lambda}}{(1-\lambda)k!} \leqslant c \qquad \text{(vraie } \forall k)$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-\lambda}}{(1-\lambda)} \leqslant c \qquad \text{(en particulier pour } k=1)$$

   On choisira donc $c = \frac{e^{-\lambda}}{1-\lambda}$.
   On procède, alors, comme suit :
   `On simule` $Y(=k) \sim$ `la loi donnée`
   `On tire une loi uniforme` $U(=u)$ `sur` $[0,1]$
   `et on compare` $u$ `au rapport d'acceptation:`

$$r_n = \frac{P(X=k)}{cP(Y=k)} = \frac{1}{k!}$$

2. La loi de $Y$ fait penser à une loi géoétrique de paramètre $(1-\lambda)$.
   En l'occurrence, si $Y_0 \sim \mathcal{G}(1-\lambda)$, alors $Y = Y_0 - 1$ suit la loi voulue.
3. La probabilité de rejet vaut :

$$1 - \frac{1}{c} = 1 - (1-\lambda)e^{\lambda}$$

   qui est d'autant plus petite que $\lambda$ est proche de 0.

**Exercice 7** :

1. Si $(B_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. selon une loi $\mathcal{B}(p)$ alors $X = \min\{n \geqslant 1 : B_n = 1\}$ est de loi $\mathcal{G}(p)$. Donc si on tire $B_1, B_2, \cdots$ i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$, et on tire $X = \min\{n \geqslant 1 : B_n = 1\}$, elle sera de loi $\mathcal{G}(p)$.
   En effet ;
   $$\begin{aligned} P(X=k) &= P(U_1 = 0, \cdots, U_{k-1} = 0, U_k = 1) \\ &= P(U_1 = 0)\cdots P(U_{k-1} = 0)P(U_k = 1) \text{ (par indépendance des } U_i) \\ &= (1-p)^{k-1}p \end{aligned}$$

2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$
   $$\begin{aligned} P(X \leqslant k) &= \sum_{i=1}^{k} p(1-p)^{i-1} \\ &= p \times \frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} \text{ (somme géoétrique)} \\ &= 1-(1-p)^k \end{aligned}$$
   Et si $t \in [k, k+1], P(X \leqslant t) = P(X \leqslant k)$
   La fonction de répartition de $X$ est donc
   $$F(t) = \begin{cases} 1-(1-p)^{[t]} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } t < 1 \end{cases}$$
   Et on cherche à inverser $F$ pour simuler la loi géométrique par la méthode d'inversion.
3. Un calcul élémentaire assure que si $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors la variable $X = \lceil T \rceil \sim \mathcal{G}(1-\exp(-\lambda))$. Autrement dit, si $T \sim \mathcal{E}(-\ln(1-p))$, alors $X \sim \mathcal{G}(p)$.
   On en déduit que pour simuler une loi géométrique, il suffit de simuler une loi exponentielle (voir le cours).
4. Puisque $X$ est à valeurs dans $\mathcal{N}^*$ avec $P(X = k) = p(1-p)^{k-1} = p_k$. L'inverse généralisée de sa fonction de répartition s'écrit, pour tout $u \in ]0, 1]$ :
   $$F^{-1}(u) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{I}_{\{p_1+p_2+\cdots+p_{k-1} < u \leqslant p_1+p_2+\cdots+p_k\}}$$
   $$= \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{I}_{\{1-(1-p)^{k-1} < u \leqslant 1-(1-p)^k\}}$$
   La méthode d'inversion assure que, si $U$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, la variable $X = F^{-1}(U)$ suit une loi géométrique de paramètre $p$. Or, d'après ce qui vient d'être dit,
   $$X = F^{-1}(U) \Leftrightarrow 1-(1-p)^{X-1} < U \leqslant 1-(1-p)^X$$
   $$\Leftrightarrow X = \frac{\ln(1-U)}{\ln(1-p)}$$
   et puisque la variable $\frac{\ln(1-U)}{\ln(1-p)}$ suit une loi exponentielle de paramètre $-\ln(1-p)$, onretrouve exactement la méthode de simulation d'une loi exponentielle.