Résolution des exercices de la méthode Branch & Bround

Proposée par : Mr. Mohamed El Merouani

Réalisée par : BOUCHDAK Sara
BENJELLOUN Jihane
BENBIHI Zouheir

1

Les étapes de la méthode du Branch & Bound:

0. Initialisation:

1. Séparation:

2. Tests et choix du (PC):

3. Evaluation:

4. Stérilisation:

2

Stérilisation:

(a) Si le (PCR) n'est pas réalisable alors retourner en 2 (Choix du (PC)).

(b) Sinon, si $Zi \geq Zs$ alors retourner en 2.

(c) Sinon ($Zi < Zs$), si Zi est atteinte en un point entier réalisable alors ce point est incumbent. Poser $Zs=Zi$ et retourner en 2.

- Dans chacun de ces trois cas, on dira que le (PC) est stérilisé.

3

Exemple

- Considérons l'exemple du problème de programmation linéaire en nombres entiers suivant, auquel nous allons appliquer la méthode de Branch & Bound:

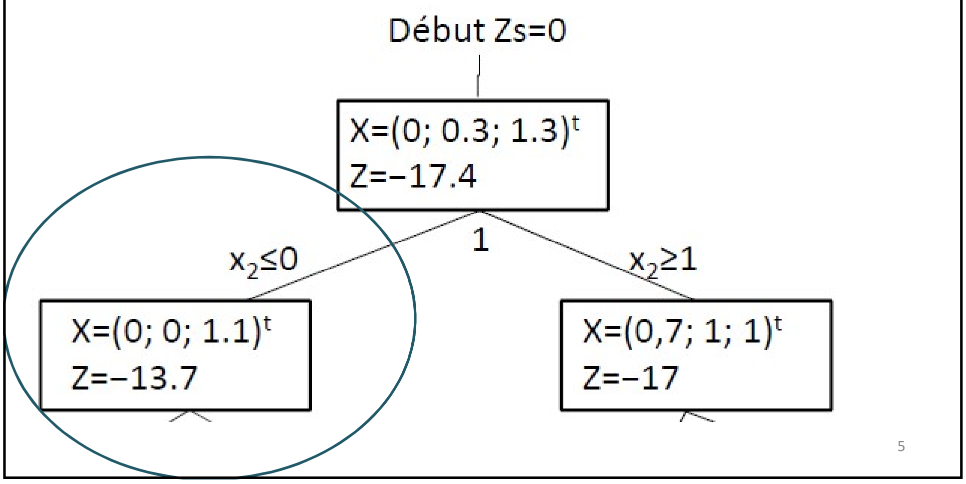
$$
(PLE)\left\{\begin{array}{ll} & \text{Min } Z=3x_1-7x_2-12x_3 \\ \text{s.à.} & \left.\begin{array}{l} -3x_1+6x_2+8x_3\leq 12 \\ 6x_1-3x_2+7x_3\leq 8 \\ -6x_1+3x_2+3x_3\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3\geq 0 \end{array}\right\} F \\ & x_1, x_2, x_3 \text{ entiers} \end{array}\right.
$$

Prof. Mohamed El Merouani

4

Exemple du Calcule de la solution optimale d'un PC intermédiaire

- Présentation de l'arborescence de B. & B.:



5

Calcule de la solution optimale d'un PC intermédiaire

- Utiliser le calcul post-optimale pour retrouver un nouveau optimum des sous-problèmes.
- Ajouter la contrainte $X_2 \leq 0$ dans le tableau optimal.

$$X_2+D=0$$

6

Le tableau optimal:

V.B	X1	X2	X3	A	B	C	-Z	T.D
X2	-23/22	1	0	7/66	-4/33	0	0	10/33
X3	9/22	0	1	1/22	3/49	0	0	14/11
C	-45/11	0	0	-5/11	1/11	1	0	3/11
-Z	0,5	0	0	85/66	8/33	0	1	-574/33

Les tableaux poste optimal: **$X_2+D=0$**

V.B	X1	X2	X3	A	B	C	D	-Z	T.D
X2	-23/22	1	0	7/66	-4/33	0	0	0	10/33
X3	9/22	0	1	1/22	3/49	0	0	0	14/11
C	-45/11	0	0	-5/11	1/11	1	1	0	3/11
D	0	1	0	0	0	0	1	0	0
-Z	0,59	0	0	85/66	8/33	0	0	1	-574/33

7

V.B	X1	X2	X3	A	B	C	D	-Z	T.D
X2	-23/22	1	0	7/66	-4/3	0	0	0	10/33
X3	9/22	0	1	1/22	3/49	0	0	0	14/11
C	-45/11	0	0	-5/11	1/11	1	1	0	3/11
D	23/22	0	0	-7/66	4/33	0	1	0	-10/33
-Z	0,59	0	0	85/66	8/33	0	0	1	-574/33

V.B	X1	X2	X3	A	B	C	D	-Z	T.D
X2	0	-7/66	0	0	-40/33	0	-1	0	0
X3	6/7	0	-1/22	0	61/539	0	3/7	0	8/7
C	-60/7	0	0	0	-47/77	1	37/7	0	11/7
A	-69/7	0	0	1	-8/7	0	-66/7	0	20/7
-Z	13,28	0	0	0	12/7	0	85/7	1	96/7

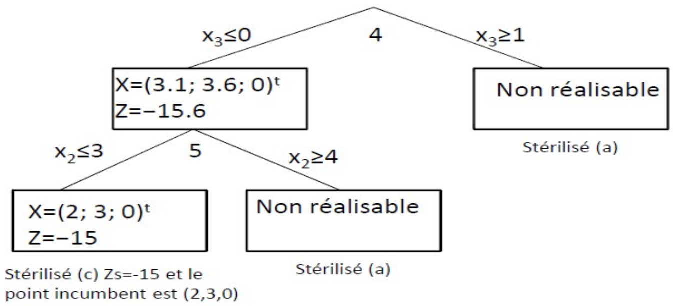
Donc on obtient la solution X(0;0;1.1) avec Z=-13,7

8

Exercice 1:

A)en branchant sur X1 au lieu de X2 à l'itération 5 : par la stratégie en largeur d'abord

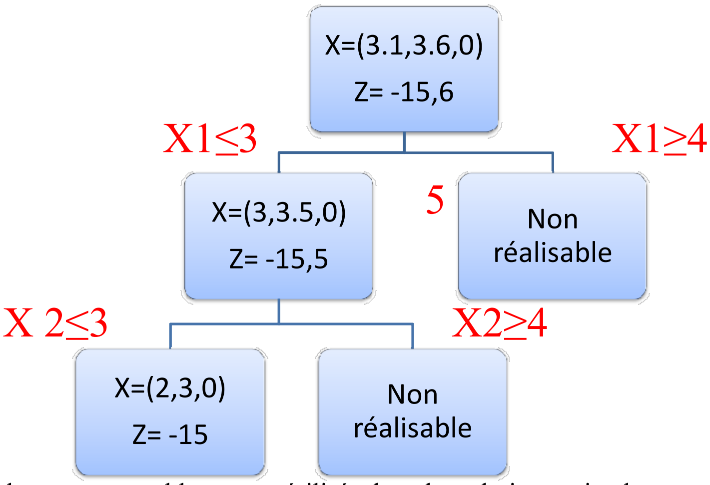
Itération 5 :



Tous les sous-ensembles sont stérilisés, donc le dernier point « incumbent » est une solution optimale de (PLE)

Exercice 1:

A)en branchant sur X1 au lieu de X2 à l'itération 5 : par la stratégie en largeur d'abord



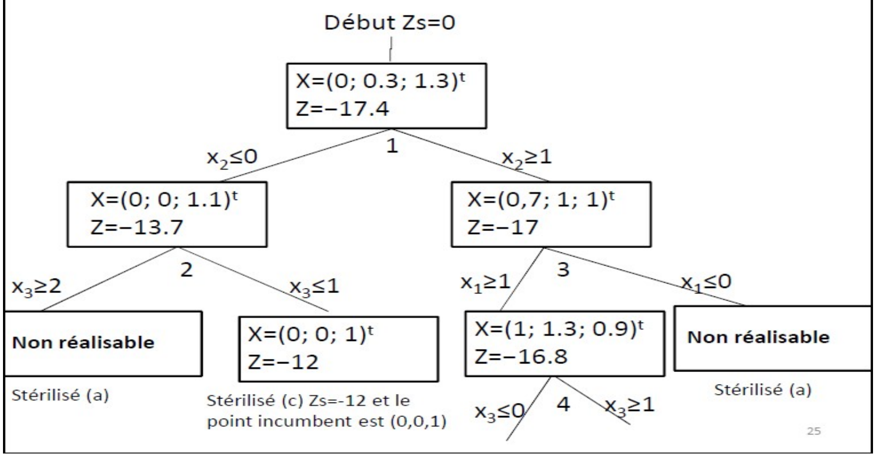
Tous les sous-ensembles sont stérilisés donc la solution optimale est :

X(2,3,0) et Z*=-15

Exercice 1:

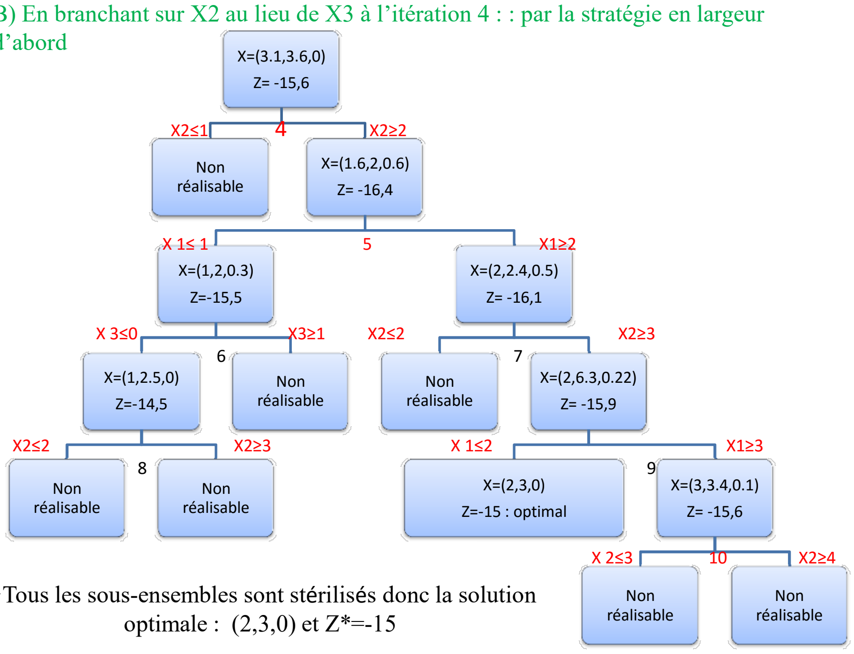
A)en branchant sur X2 au lieu de X3 à l'itération 4 : par la stratégie en largeur d'abord

- Présentation de l'arborescence de B. & B.:



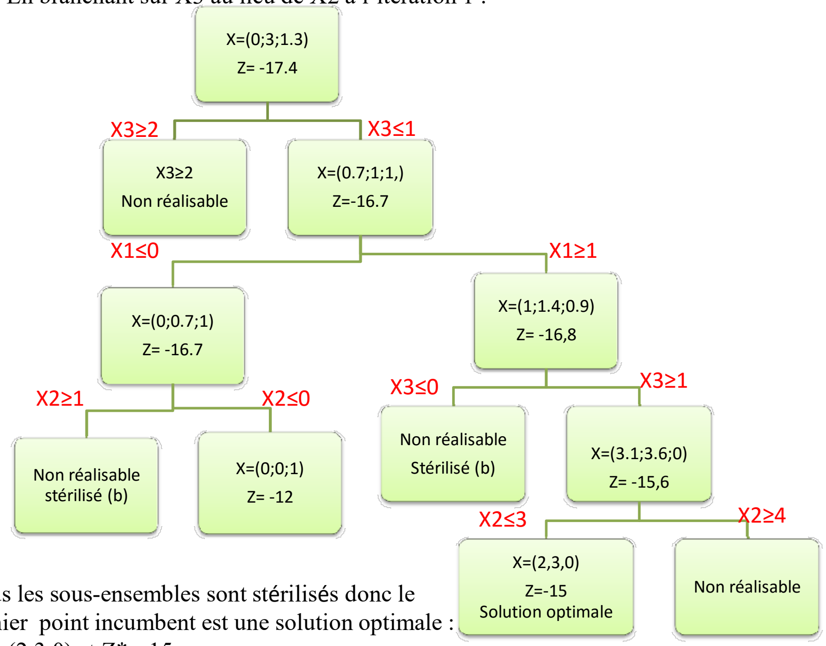
11

B) En branchant sur X2 au lieu de X3 à l'itération 4 : : par la stratégie en largeur d'abord



➢Tous les sous-ensembles sont stérilisés donc la solution optimale : (2,3,0) et Z*=-15

c) En branchant sur X3 au lieu de X2 à l'iteration 1 :



Tous les sous-ensembles sont stérilisés donc le dernier point incumbent est une solution optimale : X* =(2,3,0) et Z*=-15

Exercice 2

Utiliser la méthode de Branch & Bound pour résoudre les problèmes suivants:

a) Min $Z(x)= - x_1 - 2x_2$

Sujet .a. $-x_1+x_2 \leq 10$

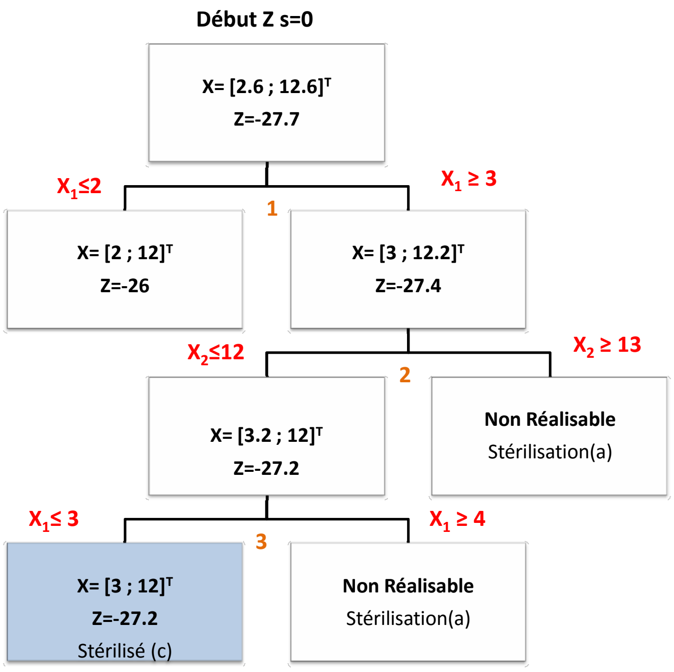
$15x_1+16x_2 \leq 240$

x_1 et x_2 non négatives et entières

===> La méthode graphique

===> **X= [2.6 ; 12.6]** et la valeur optimale **Z=-27,7**

14



15

- ✓ Tous les sous-ensembles sont stérilisés ;
- ✓ Donc le point « incumbent » X= [3 ; 12] est une solution optimale
- ✓ La valeur optimale Z_s= =-27.2

16

Exercice 2 (suite)

b) Min $Z(x) = -3x_1 - 3x_2 + 13x_3$

Sujet .à. $-3x_1+6x_2+7x_3 \leq 8$

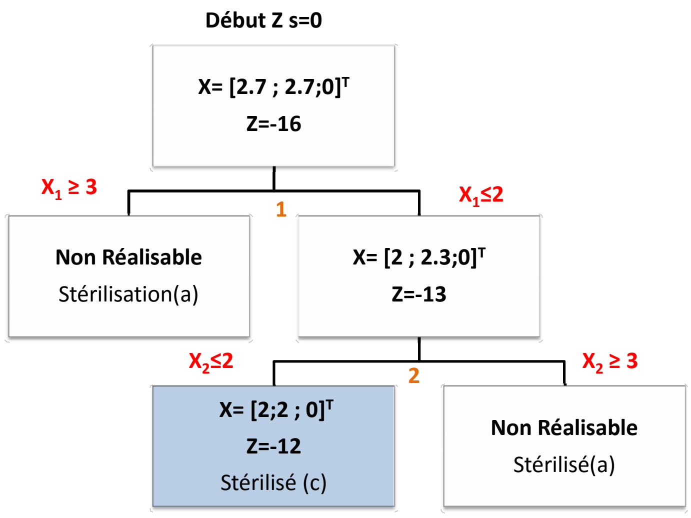
$6x_1-3x_2+7x_3 \leq 8$

$x_j \geq 0$ et entières, $j=1,2,3$.

===> La méthode du Simplexe

===> **X= [2.7 ; 2.7;0]** et **Z=-16**

17



18

✓Tous les sous-ensembles sont stérilisés ;

✓Donc le point « incumbent» **$X= [2;2 ; 0]^T$** est une solution optimale

✓La valeur optimale **$Z_s=-12$**

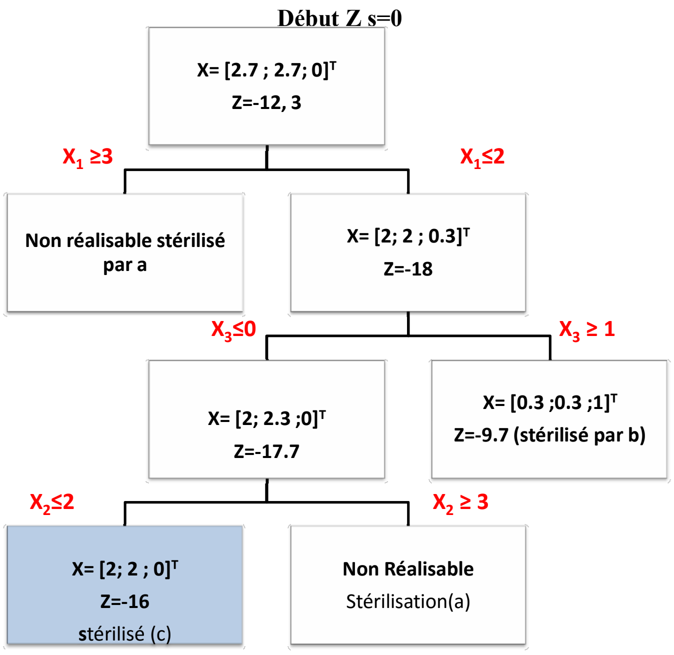
Exercice 2 (suite)

- c) Min $Z(x)= - 3x_1 - 5x_2 - 7x_3$

  Sujet .à. $-3x_1+6x_2+7x_3\leq 8$

  $6x_1-3x_2+7x_3\leq 8$

  $x_j\geq 0$ et entières, $j=1,2,3$.



21

✓Tous les sous-ensembles sont stérilisés ;

✓Donc le point « incumbent » **$X= [2;2 ; 0]^T$** est une solution optimale

✓La valeur optimale **$Z_s=-16$**

22

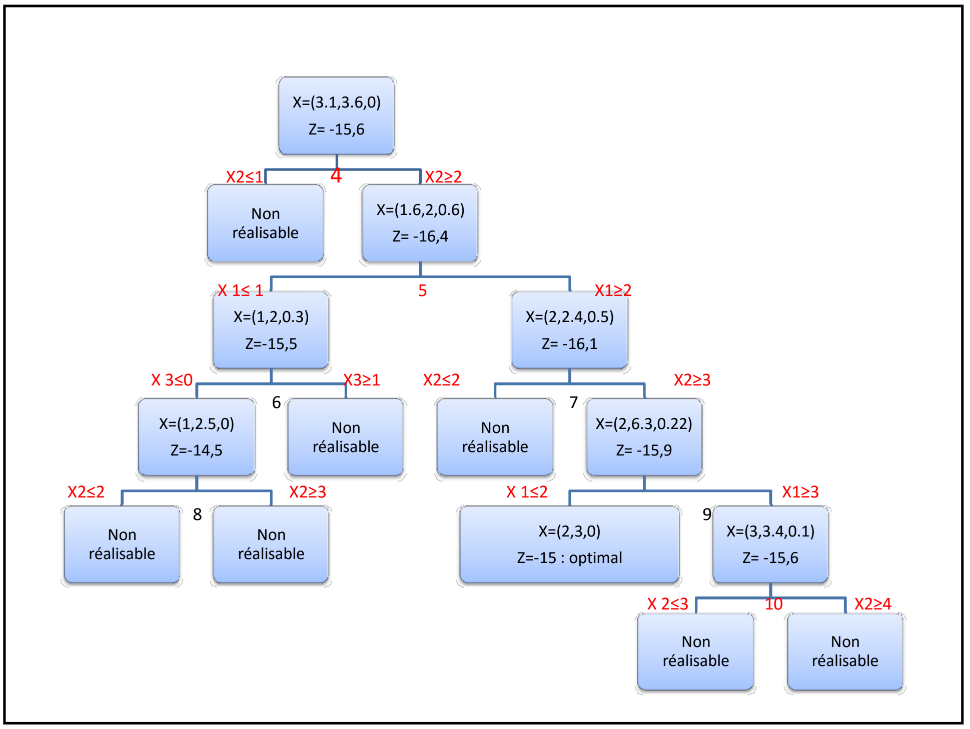
Exercice 3:

- En appliquant la méthode de B. & B., est ce qu'il peut arriver qu'après un branchement, les deux sous-problèmes soient non réalisables? Si oui donner un exemple. Sinon, expliquer pourquoi.

Solution:

- Oui c'est possible, dans ces deux cas:

- Le problème original n'est pas réalisable; alors l'ensemble des solutions de la relaxation de son problème linéaire, ne contient pas de nombres entiers.
- Si le problème original est réalisable, dans ce cas le branchement peut rendre le problème linéaire limité, si l'ensemble des solutions de sa relaxation ne contient pas de nombres entiers. (ex 1-b, interaction 8 et 10)


X=(3.1,3.6,0)
Z= -15,6
X2≤1
4
X2≥2
Non réalisable
X=(1.6,2,0.6)
Z= -16,4
X 1≤ 1
5
X1≥2
X=(1,2,0.3)
Z=-15,5
X=(2,2.4,0.5)
Z= -16,1
X 3≤0
6
X3≥1
X2≤2
7
X2≥3
X=(1,2.5,0)
Z=-14,5
Non réalisable
Non réalisable
X=(2,6.3,0.22)
Z= -15,9
X2≤2
8
X2≥3
X 1≤2
9
X1≥3
Non réalisable
Non réalisable
X=(2,3,0)
Z=-15 : optimal
X=(3,3.4,0.1)
Z= -15,6
X 2≤3
10
X2≥4
Non réalisable
Non réalisable