Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire de Tétouan

Programmation linéaire en nombres entiers

Prof. M. EL MEROUANI
Département de Statistique et Informatique
Appliquées à la Gestion

Introduction

- La plupart des problèmes issus de la gestion des Entreprises se présentent sous forme de programmes linéaires dont les variables prennent des valeurs entières.
- Par exemple, les problèmes provenant de la GRH (problèmes d'affectation), les problèmes d'allocation des ressources (problème de sac à dos), les problèmes d'emploi du temps, … etc.
- Ce type de problèmes s'appellent programmes linéaires en nombres entiers.

Méthodes naïves

- Pour résoudre cette classe de problèmes, dans le cas où le domaine réalisable est fini, nous pouvons être tentés par **les méthodes naïves**.
- **Les méthodes naïves:**
  - Méthode d'arrondi: Arrondir la solution optimale du problème continu,
  - Méthode d'énumération explicite de toutes les solutions réalisables,

➢Seulement certains problème de petite taille

Exemple montrant que la méthode d'arrondi est limitée

$$\begin{cases} \text{Min } Z=-x_1-x_2 \\ \text{Sujet à } -2x_1+2x_2=1 \\ 16x_1-14x_2=7 \\ x_1,x_2\geq 0 \text{ et entières} \end{cases}$$

Ce problème admet comme solution optimale continue:

$x=(7; 7.5)^t$ avec $Z=-14.5$

(Par la méthode graphique ou le Simplexe)

Exemple montrant que la méthode d'arrondi est limitée

- Les solutions arrondies sont:

$\overline{\mathrm{x}} = (7;7)^t$ avec $\overline{Z} = -14$

et $\tilde{\mathrm{x}} = (7;8)^t$ avec $\tilde{Z} = -15$

Remarquons que ces solutions arrondies $\overline{\mathrm{x}}$ et $\tilde{\mathrm{x}}$ ne sont pas réalisables et, en plus, elles sont très éloignées de la solution optimale entière $x^*=(3;3)^t$ du problème

Limite de la méthode d'énumération explicite

- Considérons un problème de programmation linéaire en nombres entiers et distinguons, à titre d'exemple, les deux cas suivants:
  - Cas 1: 10 variables ϵ {1,2,3,…,9},ce qui donne:

  9^{10}=3 486 784 401, soit plus de 3.10^9 cas,
  - Cas 2: 50 variables binaires, soit 2^{50} cas.

  Ces deux exemples montrent clairement que même avec des problèmes de tailles moyennes, le nombre de comparaisons à effectuer par la méthode d'énumération explicite est tellement grand que la méthode devient inefficace.

Méthodes efficaces

- Méthode de Séparation et Évaluation (Branch & Bound Method),
- Méthode de coupes,
- Méthode de Benders,
- Méthode des Groupes.

Préliminaire

- Considérons le problème de programmation linéaire en nombres entiers:

$$(PLE)\quad \begin{cases} \text{Min } c^t x \\ \text{Sujet à } Ax \geq b \\ x \geq 0 \text{ et entier} \end{cases}$$

avec $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^t$, $c=(c_1,c_2,\ldots,c_n)^t$, $b=(b_1,b_2,\ldots,b_m)^t$ et A est une matrice réelle de type (m,n).

Préliminaire

- On parlera de problème de programmation linéaire (continue) lorsqu'on ne prend pas en considération les contraintes d'intégrité (on dira qu'on a relaxé ces contraintes).
- Par contre, si certaines variables peuvent ne pas être entières, alors on dira qu'on a un problème de programmation linéaire mixte.

Notations

(P) : problème d'optimisation

F(P) : domaine réalisable de (P)

V(P) : valeur optimale de (P)

Notions de base

- Notion de Partitionnement,
- Notion de Relaxation,
- Notion de Suspension de fouille (Stérilisation ou Fathoming)

Partitionnement

- On dit que le problème (P) est partitionné en sous-problèmes (P_1), (P_2), …, (P_q) si F(P_1), …, F(P_q) constituent une partition de F(P). Autrement dit, si:

1. toute solution réalisable de (P) est réalisable pour exactement un sous-problème (P_j);
2. toute solution réalisable pour l'un des sous-problèmes (P_j) est réalisable pour (P).

Exemple

- Le problème (P) dont le domaine réalisable $F(P)=\{x_j=0 \text{ ou } 1\}$ peut être partitionné en deux problèmes (P_1) et (P_2) de même fonction objectif et ayant respectivement comme domaine réalisable:

  $F(P_1)=\{x_j=0\}$ et $F(P_2)=\{x_j=1\}$

Exemple

- Le problème (P) dont le domaine réalisable $F(P)=\{0\leq x_j\leq 2$ et xj entier$\}$ peut être partitionné en trois problèmes (P_1), (P_2) et (P_3) de même fonction objectif et ayant respectivement comme domaine réalisable:

  $F(P_1)=\{x_j=0\}$, $F(P_2)=\{x_j=1\}$ et $F(P_3)=\{x_j=2\}$.

Exemple

- Le problème (P) dont le domaine réalisable $F(P)=\{0 \leq x_j \leq 4$ et xj entier$\}$ peut être partitionné en deux problèmes (P_1) et (P_2) de même fonction objectif et ayant respectivement comme domaine réalisable:

  $F(P_1)=\{0 \leq x_j \leq 2$ et xj entier$\}$

  et $F(P_2)=\{3 \leq x_j \leq 4$ et xj entier$\}$.

Stratégie vague et globale de résolution

- Essayer de solutionner (P)
- Sans succès, alors partitionner (P) en deux ou plusieurs sous problèmes que l'on place dans une liste.
- Sélectionner un problème dans la liste=problème candidat (PC).
- Essayer de solutionner (PC):
  - Avec succès, alors sélectionner un autre problème dans la liste,
  - Sans succès, alors partitionner (PC) et placer ses descendants dans la liste.
- Le processus est répété tant que la liste est non vide.

Remarque

- Chaque fois qu'on réussit, on identifie un élément de F(P) et on retient la meilleure solution de (P) rencontrée jusqu'ici (Point candidat ou incumbent)

Relaxation

- Le problème (P) est dit relaxé si certains contraintes sont relâchées, c'est-à-dire si certains contraintes ne sont pas prises en considération.
- Le problème relaxé sera noté par (P_R).

Exemple:

$$(P)\begin{cases} \text{Min } c^t x \\ \text{Sujet à } Ax \geq b \\ x \geq 0 \text{ et entier} \end{cases} \qquad (P_R)\begin{cases} \text{Min } c^t x \\ \text{Sujet à } Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Relaxation: Propriétés

1. $F(P) \subseteq F(P_R)$
2. $F(P_R)=\emptyset \Rightarrow F(P)=\emptyset$
3. $V(P_R) \leq V(P)$ (pour un problème de minimisation)
4. Si une solution optimale de (P_R) est dans F(P), alors c'est aussi une solution optimale de (P).

Critères de cessation de fouille (Stérilisation ou Fathoming)

- Notons par Zs la valeur de la fonction objectif au point candidat ou incumbent et considérons un problème candidat (PC) d'un problème d'optimisation.
- Le (PC) est dit stérilisé si l'un des critères suivants est satisfait:

1. $F(PC_R)=\emptyset$ (=> oublier (PC))
2. $V(PC_R) \geq Zs$ (=> oublier (PC))
3. Une solution optimale du (PC_R) est réalisable pour (PC) (avec $V(PC_R)<Zs$) (=> oublier (PC))

Remarque

- Si ces critères ne s'appliquent pas avec la solution optimale de (PC_R), alors on peut:
  - Engendrer des descendants de (PC)

  ou
  - Sélectionner une autre relaxation plus « adéquate » pour essayer d'appliquer les critères de « Fathoming ».

Procédure générale

- Étape1: la liste des candidats contient (P), Zs=+∞
- Étape 2: Terminer si la liste est vide:

  si au moins une solution réalisable de (P) a été rencontrée, alors ce point incumbent est une solution optimale de (P). Autrement, F(P)≠Ø.
- Étape 3: Choisir un problème dans la liste qui devient (PC). Eliminer (PC) de la liste.
- Étape 4: Identifier une relaxation (PC_R) de (PC).

Procédure générale

- Étape 5: Traiter (PC_R)
- Étape 6: Si $F(PC_R)=\emptyset$, alors aller à l'étape 2.
- Étape 7: Si $V(PC_R)\geq Zs$, alors aller à l'étape 2.
- Étape 8: -Si la solution optimale de (PC_R) est réalisé pour (PC), alors nous venons d'identifier une nouvelle solution de (P).

  -Si $V(PC)=V(PC_R)<Zs$, alors poser $Zs=V(PC)$, et cette solution constitue le nouvel « point incumbent ».

  Retourner à l'étape 2.

Procédure générale

- Étape 9: Si on décide de poursuivre avec (PC), aller à l'étape 10. Autrement, aller à l'étape 11.
- Étape 10: Modifier la relaxation de (PC) pour en obtenir une nouvelle qu'on note (PC_R). Aller à l'étape 5.
- Étape 11: Partitionner (PC) et placer les nouveaux sous-problèmes dans la liste.

  Aller à l'étape 2.

Bibliographie

- Y. Benadada & A. El Hilali Alaoui :«*Programmation Mathématique, de la modélisation à la résolution*», Edition Kawtar Print, Rabat, 2012.