Exercices d'Analyse Combinatoire

Prof. Mohamed El Merouani

ENSA de Tétouan

2013-2014

Exercice 1

Dans un bureau de vingt-cinq personnes, combien existe-t-il de façons de choisir un président, un vice -président, un secrétaire et un trésorier ?

Exercice 1

Dans un bureau de vingt-cinq personnes, combien existe-t-il de façons de choisir un président, un vice -président, un secrétaire et un trésorier ?

Réponse :

A_{25}^{4}

Exercice 2

12 candidats se présentent aux éléctions à un conseil d'administration d'un établissement comportant 8 places. La liste des élus est publiée par ordre alphabétique. Combien y-a-t-il de listes possibles ?

Exercice 2

12 candidats se présentent aux éléctions à un conseil d'administration d'un établissement comportant 8 places. La liste des élus est publiée par ordre alphabétique. Combien y-a-t-il de listes possibles ?

Réponse :

A_{12}^{8}

Exercice 3

Quel est le nombre de choix possibles de 13 étudiants parmi un groupe de 120 étudiants ?

Exercice 3

Quel est le nombre de choix possibles de 13 étudiants parmi un groupe de 120 étudiants ?

Réponse :

C_{120}^{13}

Exercice 4

Un jeu de hasard "la loterie" consiste en choisir un sous-ensemble de 6 numéros (non-ordonnés) parmi 49 numéros au total. Combien il y a des résultats possible dans ce jeu ?

Exercice 4

Un jeu de hasard "la loterie" consiste en choisir un sous-ensemble de 6 numéros (non-ordonnés) parmi 49 numéros au total. Combien il y a des résultats possible dans ce jeu ?

Réponse :

$C_{49}^{6} = 13983816$ résultats possibles ! ! !

Exercice 5

Calculer le nombre de permutations qui vous apparaitront différentes dans le cas des 11 lettres du mot MISSISSIPPI qui est constitué de 1M, 4I, 4S et 2P.

Exercice 5

Calculer le nombre de permutations qui vous apparaitront différentes dans le cas des 11 lettres du mot MISSISSIPPI qui est constitué de 1M, 4I, 4S et 2P.

Réponse :

$$\frac{11!}{1!4!4!2!}$$

Exercice 6

Combien y-a-t-il de façons d'assoir 10 personnes sur un banc qui comporte que 4 places ?

Exercice 6

Combien y-a-t-il de façons d'assoir 10 personnes sur un banc qui comporte que 4 places ?

Réponse :

A_{10}^{4}

Exercice 7

1. Une équipe de 8 personnes est amenée à occuper 8 postes de travail distincts.
   Combien peut-on envisager de répartitions distinctes des 8 personnes.
2. La quantité de travail à faire ayant diminué, on n'a besoin que de 5 personnes. De combien de manières peut-on les choisir ?
3. Dans cette équipe de 5 personnes, chacun est affecté à une tâche particulière mais peut occuper n'importe quel poste. De combien de manières peut-on choisir 5 personnes parmi les 8 personnes en les affectant à un travail précis ?

Solution 7

Solution 7

1. Le nombre de répartitions distinctes correspond à toutes les permutations possibles portant sur l'ensemble des 8 personnes. Le résultat est donc $8! = 40320$

Solution 7

1. Le nombre de répartitions distinctes correspond à toutes les permutations possibles portant sur l'ensemble des 8 personnes.
   Le résultat est donc $8! = 40320$
2. Il s'agit de choisir 5 personnes parmi 8, sans répétition (ce serait prendre deux fois la même personne !) et sans ordre.
   Le résultat est donc $C_8^5 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$

Solution 7

1. Le nombre de répartitions distinctes correspond à toutes les permutations possibles portant sur l'ensemble des 8 personnes.
   Le résultat est donc $8! = 40320$
2. Il s'agit de choisir 5 personnes parmi 8, sans répétition (ce serait prendre deux fois la même personne !) et sans ordre.
   Le résultat est donc $C_8^5 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$
3. On choisit à nouveau 5 personnes parmi 8, sans répétition mais avec ordre (ici l'ordre est l'affectation à une tâche précise).
   Le résultat est donc $A_8^5 = \frac{8!}{3!} = 8.7.6.5.4 = 6720$

Exercice 8

De combien de façons peut-on placer 4 dossiers différents dans 15 casiers différents ?

1. à raison d'un dossier par casier
2. quel que soit le nombre de dossiers par casier

Exercice 8

De combien de façons peut-on placer 4 dossiers différents dans 15 casiers différents ?

1. à raison d'un dossier par casier
2. quel que soit le nombre de dossiers par casier

Réponse :

Exercice 8

De combien de façons peut-on placer 4 dossiers différents dans 15 casiers différents ?

1. à raison d'un dossier par casier
2. quel que soit le nombre de dossiers par casier

Réponse :

1. C'est un arrangement sans répétition de 4 éléments parmi 15, donc c'est $A_{15}^{4} = 32760$ façons.

Exercice 8

De combien de façons peut-on placer 4 dossiers différents dans 15 casiers différents ?

1. à raison d'un dossier par casier
2. quel que soit le nombre de dossiers par casier

Réponse :

1. C'est un arrangement sans répétition de 4 éléments parmi 15, donc c'est $A_{15}^{4} = 32760$ façons.
2. C'est un arrangement avec répétition de 4 éléments parmi 15, donc c'est $15^4 = 50625$ façons.

Exercice 9

Combien de nombres de quatre (4) chiffres peut-on former à partir des chiffres 1,2,3,...,8,9 dans les cas suivants :

1. Les chiffres peuvent se répéter.
2. Les chiffres ne peuvent pas se répéter.
3. Les chiffres peuvent se répéter et les nombres formés sont divisibles par 5.
4. Les chiffres ne peuvent pas se répéter et les nombres formés ne contiennent que des chiffres impaires.

Réponse 9 :

Réponse 9 :

1. Il y a ordre et il y a répétitions donc c'est un arrangement avec répétitittions de 4 parmi 9, c'est 9^4.

Réponse 9 :

1. Il y a ordre et il y a répétitions donc c'est un arrangement avec répétittions de 4 parmi 9, c'est 9^4.
2. ici il n'y a pas de répétitions, donc c'est un arrangement sans répétitions de 4 parmi 9. C'est $A_9^4 = \frac{9!}{5!} = 6 \times 7 \times 8 \times 9$.

Réponse 9 :

1. Il y a ordre et il y a répétitions donc c'est un arrangement avec répétittions de 4 parmi 9, c'est 9^4.
2. ici il n'y a pas de répétitions, donc c'est un arrangement sans répétitions de 4 parmi 9. C'est $A_9^4 = \frac{9!}{5!} = 6 \times 7 \times 8 \times 9$.
3. Les chiffres sont divisibles par 5 s'ils se terminent par 5, donc, on doit choisir les 3 chiffres restants parmi 8.
   Comme il y a répétitions, donc, c'est un arrangement avec répétitions de 3 parmi 8, soit 8^3.

Réponse 9 :

1. Il y a ordre et il y a répétitions donc c'est un arrangement avec répétittions de 4 parmi 9, c'est 9^4.
2. ici il n'y a pas de répétitions, donc c'est un arrangement sans répétitions de 4 parmi 9. C'est $A_9^4 = \frac{9!}{5!} = 6 \times 7 \times 8 \times 9$.
3. Les chiffres sont divisibles par 5 s'ils se terminent par 5, donc, on doit choisir les 3 chiffres restants parmi 8.
   Comme il y a répétitions, donc, c'est un arrangement avec répétitions de 3 parmi 8, soit 8^3.
4. Les chiffres impaires que l'on utilise sont 1,3,5,7,9.
   Les chiffres ne peuvent pas se répéter, donc c'est un arrangement sans répétitions de 4 parmi 5, soit $A_5^4 = \frac{5!}{1!} = 5!$

Application de la Combinatoire aux Calculs des Probabilités

Exercice 1

Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules vertes. On en tire 3 boules successivement.
Quelle est la probabilité de tirer dans l'ordre : une boule rouge, une boule verte et une boule rouge dans les deux cas suivantes :

1. On ne remet pas la boule tirée dans l'urne,
2. On remet la boule après chaque tirage.

Exercice 1

Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules vertes. On en tire 3 boules successivement.
Quelle est la probabilité de tirer dans l'ordre : une boule rouge, une boule verte et une boule rouge dans les deux cas suivantes :

1. On ne remet pas la boule tirée dans l'urne,
2. On remet la boule après chaque tirage.

Réponse :

1. La probabilité cherchée est : $\frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{1}{6}$,
2. La probabilité cherchée est : $\frac{6}{10} \times \frac{4}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{18}{125}$

Exercice 2

Soit l'expérience "lancer deux dés". Déterminer la probabilité pour obtenir 7 en un seul lancer (somme de ce qu'on obtient avec les 2 dés).

Exercice 2

Soit l'expérience "lancer deux dés". Déterminer la probabilité pour obtenir 7 en un seul lancer (somme de ce qu'on obtient avec les 2 dés).

Réponse :

$$\Omega = \{(1,1);(1,2);\cdots;(1,6);(2,1);\cdots;(2,6);\cdots;(6,6)\}$$

donc $Card\Omega = 6 \times 6 = 36$.
Soit A l'événement "Obtenir 7 en un seul lancer"

$$A = \{(i,j) \in \Omega / i + j = 7\}$$

$A = \{(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1)\}$, donc $CardA = 6$

$$P(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Exercice 3

Monsieur A se rappelle seulement des chiffres du numéro de téléphone de B. Il s'agit des chiffres 3,4,8,6,1 et 5. Avec ces chiffres A a composé un numéro au hasard.
Donner la probabilité pour que le numéro composé soit celui de B.

Exercice 3

Monsieur A se rappelle seulement des chiffres du numéro de téléphone de B. Il s'agit des chiffres 3,4,8,6,1 et 5. Avec ces chiffres A a composé un numéro au hasard.
Donner la probabilité pour que le numéro composé soit celui de B.

Réponse :

Le nombre de numéros qu'on peut composer avec ces 6 chiffres est égal au nombres des permutations sans répétition d'un ensemble à 6 éléments, donc égal à $6! = 720$. Mais, un seul numéro parmi les 720 est celui de B. D'où, la probabilité cherchée est :

$$P = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$$

Exercice 4

Dans un amphi. se trouvent 8 étudiants et 3 étudiantes. On choisit dans ce groupe, simultanément et au hasard 7 personnes. Parmi celles-ci on choisit simultanément et au hasard 3 personnes.
Quelle est la probabilité que les 3 dernières personnes choisies soient les 3 étudiantes ?

Solution 4

Soient les événements suivants :
A ="Les 3 étudiantes figurent parmi les 7 personnes tirées la 1ère fois".
B ="Les 3 étudiantes sont tirées la 2ème fois".
On a : $P(A) = \frac{C_3^3 \times C_8^4}{C_{11}^7}$ et $P(B) = \frac{C_3^3 \times C_4^0}{C_7^3}$
Les événements A et B étant indépendants, on a :

$$P(AB) = P(A).P(B) = \frac{C_8^4}{C_{11}^7 \times C_7^3} = 0,001$$