Contrôle Continu de Maths I

Durée 1 heure

Problème nº 1 :

On considère la fonction $f$ définie par :

$$
\begin{cases}
  f(x) = \frac{x^2}{2 - \sqrt{4 + x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\
  f(0) = a
\end{cases}
$$

Où $a$ est un paramètre réel.

1) Pour quelle(s) valeur(s) de $a$, $f$ est continue en 0 ?
2) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Problème nº 2 :

Soit $(V_n)$ une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $V_1$.

Soit $(U_n)$ une suite numérique définie par :

$$U_n = e^{V_n} \quad \text{Pour tout } n \text{ entier naturel non nul}$

(où $e^{V_n}$ désigne l’exponentielle népérienne de $V_n$).

1) Vérifier que $(U_n)$ est une suite géométrique dont il faudra préciser les caractéristiques, c’est-à-dire son premier terme $U_1$ et sa raison $q$, en fonction de $V_1$ et $r$.
2) Donner la somme $S_n=U_1+U_2+\ldots+U_n$ en fonction de $V_1$, $r$ et $n$.
3) Préciser les valeurs de $r$ pour lesquelles la somme $S_n$ admet une limite quand $n$ tend vers $+\infty$. 
Problème n°1 :
1. \( f \) continue en 0 \( \iff \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = a \)

\[
f(x) = \frac{x^2}{2 - \sqrt{4 + x^2}} = \frac{x^2(2 + \sqrt{4 + x^2})}{-x^2} = -\left(2 + \sqrt{4 + x^2}\right)
\]

D'où \( \lim_{x \to 0} f(x) = -4 \)

Donc \( f \) est continue en 0 \( \iff f(0) = -4 \)
\( \iff a = -4 \)

2. \( \lim_{x \to -\infty} f(x) = ? \)

\[
f(x) = \frac{x^2}{2 - \sqrt{4 + x^2}} = \frac{x^2}{-x} = -x
\]

D'où \( \forall x \in ]-\infty,0[; \ |x| = -x \)

et \( \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{2 + \frac{4}{\sqrt{x^2} + 1}} = -\infty \)

Problème n°2 :
1) \( U_n = e^{V_n} \)

\[
U_{n+1} = e^{V_{n+1}} = e^{V_n + r} = e^{V_n} \cdot e^r
\]

\[
U_{n+1} = U_n \cdot e^r \quad \forall n \in \mathbb{N}^*
\]

D'où \( \left(U_n\right) \) est une suite géométrique de raison \( q = e^r \) et de premier terme \( U_1 = e^{V_1} \)

2) D’après le cours \( S_n = U_1 \frac{1-q^n}{1-q} \) si \( q \neq 1 \)

\[
S_n = e^{V_1} \frac{1-(e^r)^n}{1-e^r} \quad \text{si} \quad r \neq 0
\]

Si \( r = 0 \) alors
\( S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n = e^{V_1} + e^{V_1} + \cdots + e^{V_i} = ne^{V_i} \)

Limite de \( S_n \) quand \( n \to +\infty \):

\[
\lim_{n \to +\infty} S_n = e^{V_1} \lim_{n \to +\infty} \frac{1-(e^r)^n}{1-e^r}
\]
Or \( (e^r)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } r = 0 \\ +\infty & \text{si } r > 0 \\ 0 & \text{si } r < 0 \end{cases} \)

Alors :

Si \( r = 0 \), \( \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} ne^{Vi} = +\infty \)

Si \( r > 0 \), \( \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{e^{Vi}}{1-e^r} \cdot (-\infty) = +\infty \)

Si \( r < 0 \), \( \lim_{n \to +\infty} S_n = e^{Vi} \cdot \frac{1}{1-e^r} = e^{Vi} \)

Conclusion :

\( S_n \) admet une limite quand \( n \to +\infty \) pour \( r < 0 \) et dans ce cas on a :

\[
\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{e^{Vi}}{1-e^r}
\]

3) \( V_i = 0 \) et \( r = -1 \)

\[
U_n = e^{Vi} = e^{[Vi + (n-1)r]}
\]

\[
= e^{Vi} (e^r)^{(n-1)}
\]

\[
= e^0 \cdot (e^{-1})^{(n-1)} = e^{1-n}
\]

Dans ce cas : \( r = -1 < 0 \)

\[
S_n = e^{Vi} \cdot \frac{1-(e^r)^n}{1-e^r}
\]

Donc

\[
S_n = \frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}
\]

\[
\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{1-e^{-1}} \quad (\text{car } e^{-n} = \frac{1}{e^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0).
\]