Correction des exercices des pages de 99 á 102 du livre (Analyse Mathematique)

I.-

5) la relation est possible si :

$$x+1>0 \Rightarrow x>-1$$

$$2x-1>0 \Rightarrow x>1/2$$

donc $x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$

On a : $\log(x+1)^2 = \log 3(2x-1)$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = 3(2x-1)$$

$$\Rightarrow x^2-4x+4=0$$

$$\Rightarrow \underline{x=2}$$

6) Relation possible pour $x>0$ et $x+4>0$

Même principe que 1) ; on trouve $x=-5$ ou $x=1$

solution acceptable $\underline{x=1}$

IV.-

1) $f(x) = \dfrac{\mathrm{Log}\,3}{\mathrm{Log}\,x}$

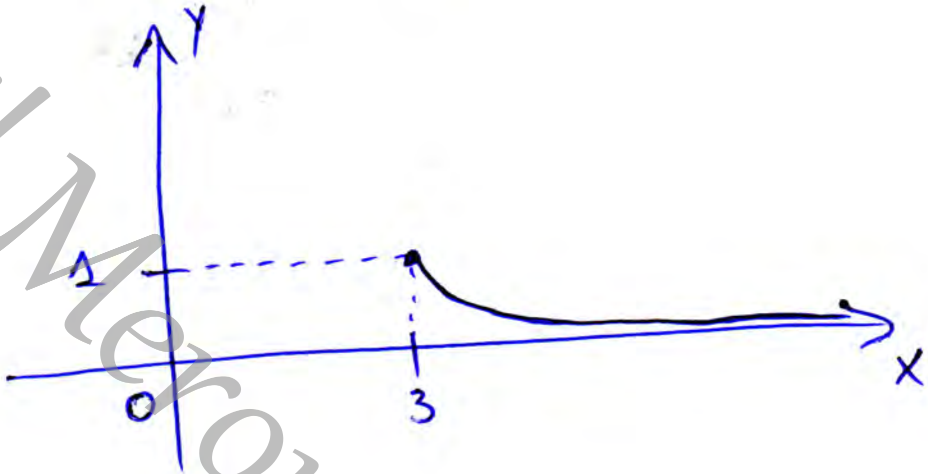
f est définie sur $]3, +\infty[$

$$f'(x) = \left(-\log 3 \cdot \frac{1}{x}\right) \Big/ (\log x)^2 = \frac{-\log 3}{x(\log x)^2}$$

$f'(x)$ est toujours <0

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $y=0$ est asymptote à la courbe de f.

x	3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	1	$\searrow$	0



I.-

7) Posons $a=5^x$

L'équation devient $a^2-6a+5=0$

$\Rightarrow$ deux solutions distinctes $a_1=1$ et $a_2=5$

Alors $x_1\log 5=0$ et $x_2\log 5=\log 5$

$\Rightarrow$ $x_1=0$ et $x_2=1$

2) On peut écrire $e^x(e^x+e)=e^x+e$

Soit $e^x=1 \Rightarrow x=0$

IV.-

2) $f(x) = e^{-x^2}$

$D_f = \mathbb{R}$

f est paire : $f(-x) = f(x)$, on peut donc l'étudier sur $[0,+\infty[$

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

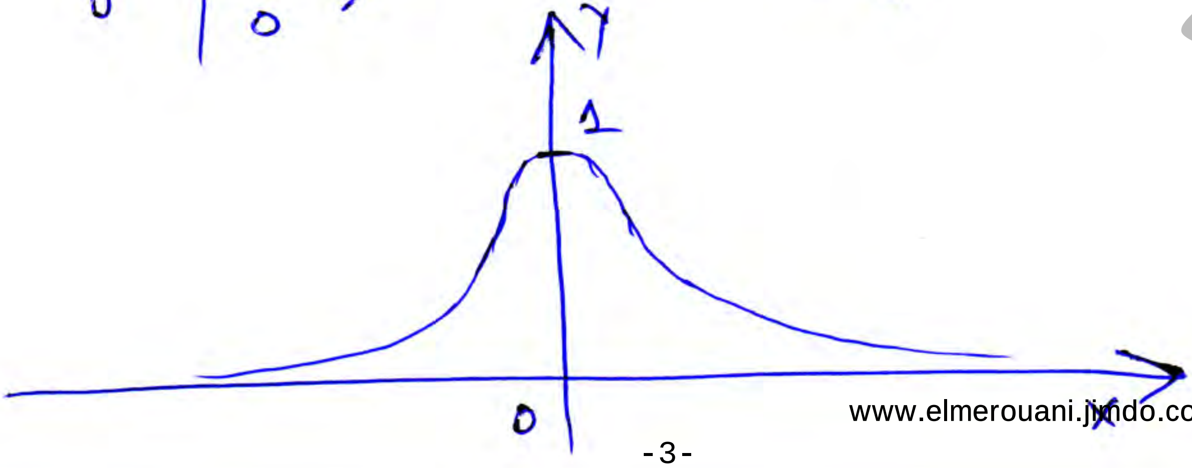
$f'(x) = -2x e^{-x^2} = -2x f(x)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, $f(0) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

l'axe des x est asymptote à la courbe de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



IV.-

3) $$f(x) = x \log x$$

la fonction logarithme est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc il en est de même de f.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x \log x = 0^-$$

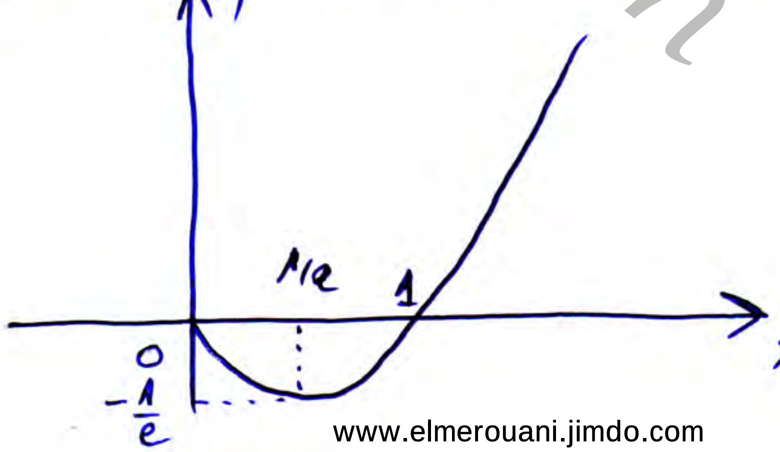
lorsque $x \to +\infty$, $x \log x \to +\infty$

$f'(x) = \log x + 1$ qui s'annule pour $x = \frac{1}{e}$ en changeant de signe, ce qui correspond à un extremum.

x	0		$1/e$		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	1	$+$	
f	‖ 0^-	$\searrow$	$-1/e$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

lorsque $x \to +\infty$, $\frac{f(x)}{x} = \log x \to +\infty$

donc, branche parabolique dans la direction Oy et pas d'asymptote oblique



4) $$g(x) = \frac{(\log x)^2}{x}$$

g est définie et continue pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ donc $x=0$ est une asymptote

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ donc $y=0$ est une asymptote

$$g'(x) = \frac{-(\log x)^2 + 2\log x}{x^2}$$

$$= \frac{\log x\,(2 - \log x)}{x^2}$$

$$g''(x) = \frac{((\log x)^2 - 2\log x).2x - (2.\frac{1}{x}.\log x - 2.\frac{1}{x}).x^2}{x^4}$$

$$= 2\left[\frac{(\log x)^2 - 3\log x + 1}{x^3}\right]$$

$g'(x) = 0 \iff x = 1 \quad (\log 1 = 0)$

ou $2 - \log x = 0 \Rightarrow \log x = 2$

la réciproque de logarithme est la fonction exponentielle, d'où $x = e^2$

$g''(x) = 0 \iff (\log x)^2 - 3\log x + 1 = 0$

On fait le changement de variables suivant $X = \log x$ et on effectue

$X^2 - 3X + 1 = 0$

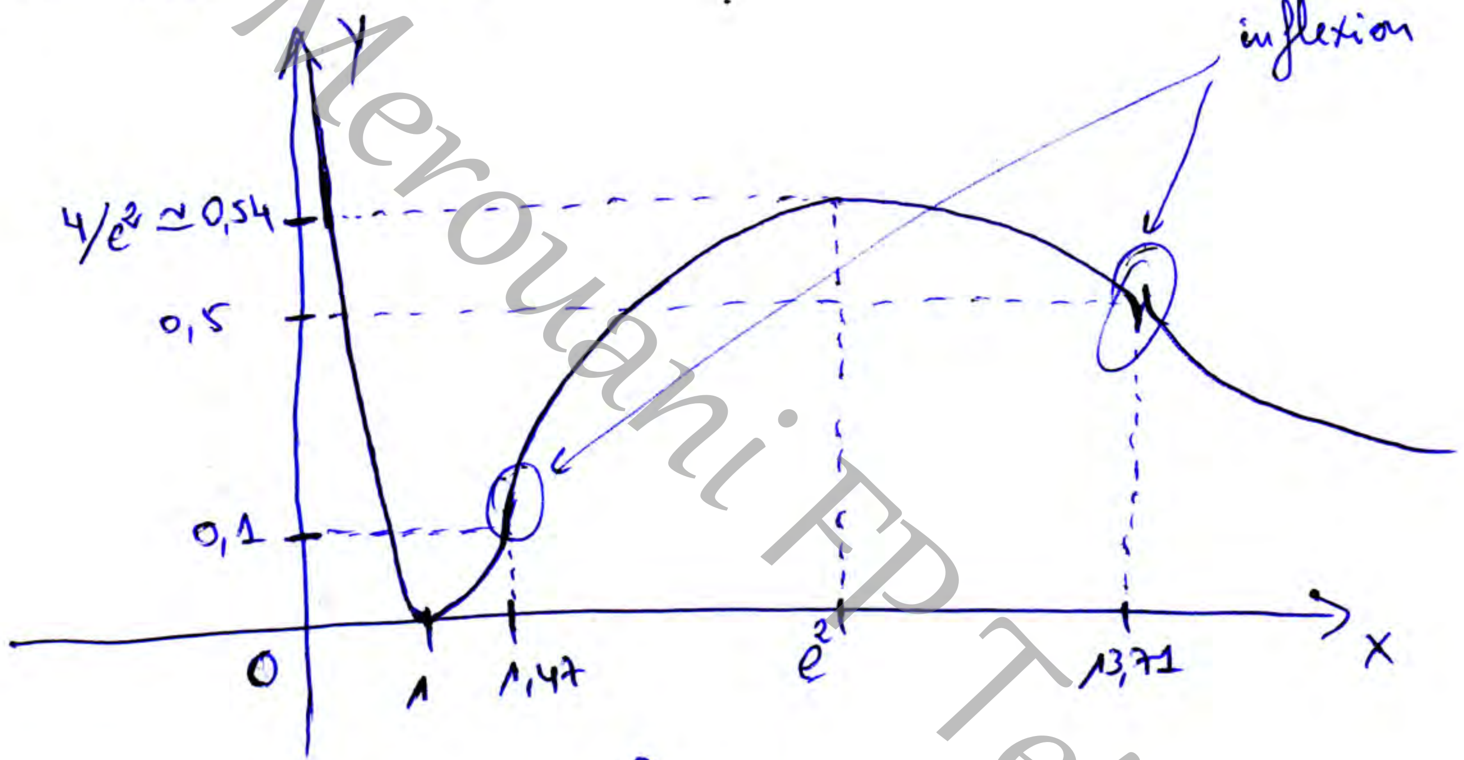
$\Delta = 9 - 4 = 5$

$\Rightarrow 2$ racines $\quad X_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $X_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow \log x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = e^{(3\pm\sqrt{5})/2} = \begin{cases} 1,47 \\ 13,71 \end{cases}$

où le graphe de g présente des pts d'inflexion

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$4e^{-2}$	↘	0



5) $h(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}}$

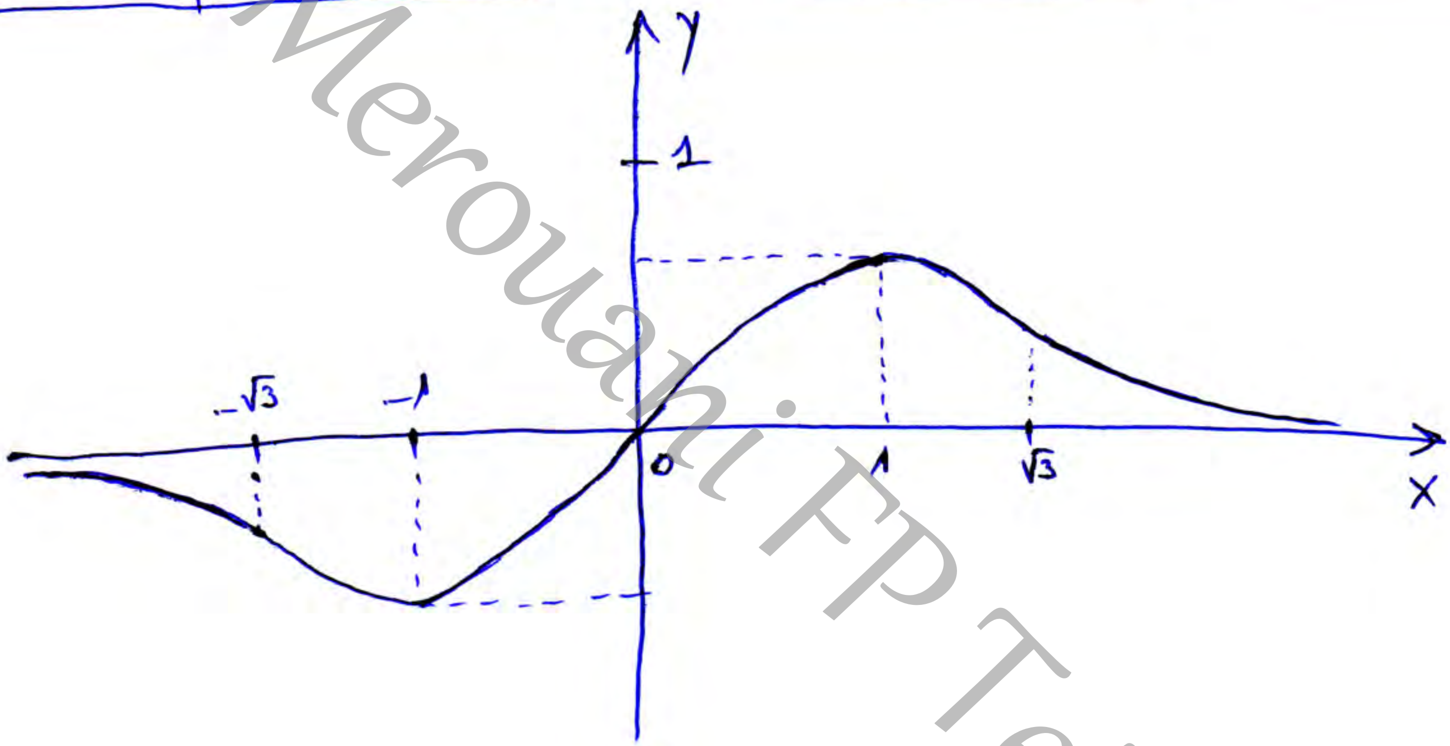
h est définie et continue sur $\mathbb{R}$. C'est une fonction impaire

$h'(x) = (1 - x^2) e^{-\frac{x^2}{2}}$

$h(x) \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow \pm\infty$

$h''(x) = x(x^2 - 3) e^{-x^2/2}$ s'annule en changeant de signe pour $x = 0$ et $x = \pm\sqrt{3}$; donc 3 pts d'inflexion.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
f	0	$\searrow$		$\searrow$	$-e^{-1/2}$	$\nearrow$		$\nearrow$	$e^{-1/2}$	$\searrow$		$\searrow$	0
	concave			convexe				concave				convexe	



I.-

6) $\log_2 x + \log_2(x+4) = \log_2 5 \qquad (2)$

La relation est possible pour $x+4>0$ et $x>0$

c'est-à-dire $x>-4$ et $x>0$

d'où $x \in]0,+\infty[$

$$(2) \iff \frac{\operatorname{Log} x}{\log 2} + \frac{\operatorname{Log}(x+4)}{\log 2} = \frac{\operatorname{Log} 5}{\operatorname{Log} 2}$$

$$\iff \operatorname{Log} x(x+4) = \log 5$$

$$\iff x^2+4x-5=0$$

$$\iff x^2+5x-x-5=0$$

$$\iff x^2-x+5(x-1)=0$$

$$\iff x(x-1)+5(x-1)=0$$

$$\iff (x-1)(x+5)=0$$

$$\implies x=1 \text{ ou } x=-5$$

1) Pour les valeurs de x et y n'annulant pas le dénominateur

$$\frac{\cos x - \cos y}{\sin x + \sin y} = \frac{-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}} = -\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}$$

Pour $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{\pi}{6}$, on en déduit

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}} = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}$$

D'où $\operatorname{tg}\frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

<u>Remarque</u>: On peut aussi calculer $\operatorname{tg}\frac{\pi}{24} = \frac{\sin\frac{\pi}{24}}{\cos\frac{\pi}{24}}$ à partir du calcul de $\sin\frac{\pi}{24}$ et $\cos\frac{\pi}{24}$:

On a la formule $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

alors $\cos^2\frac{\pi}{24} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{2}$

De même $\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

puisque $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$, on a $\cos\frac{\pi}{12} > 0$, donc

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

Donc $\cos^2\frac{\pi}{24} = \frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}$

D'où $$\boxed{\cos\frac{\pi}{24}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

Pour le sinus on trouve :

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

et $$\sin\frac{\pi}{24}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

en effet, $$\sin^2\frac{\pi}{12}=1-\cos^2\frac{\pi}{12}=1-\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$
$$=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

puisque $0<\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{2}$, on a $\sin\frac{\pi}{12}>0$, donc

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

on a : $$\sin^2\frac{\pi}{24}=1-\cos^2\frac{\pi}{24}=1-\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}$$
$$=\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}$$

d'où $$\boxed{\sin\frac{\pi}{24}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

En fin, $$\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}=\frac{\sin\pi/24}{\cos\pi/24}=\frac{\cancel{1/2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{\cancel{1/2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2}{\sqrt{4-2-\sqrt{3}}}=\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2-\sqrt{3}}=$$
$$=\frac{\sqrt{4-(2+\sqrt{3})}}{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}{4-(2+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{2\sqrt{2-\sqrt{3}} - (2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}} = \text{?} \ldots$$

2) On trouve : $\dfrac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \operatorname{tg} \dfrac{x+y}{2}$

$$\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \frac{\cancel{2} \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\cancel{2} \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \text{?}$$

Pour $x = \dfrac{\pi}{4}$, $y = \dfrac{\pi}{3}$, on en déduit :

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{24}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$$

VII.-

1) $$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \cos y}{\cos x \cos y}$$

$$= \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$$

2) En associant le premier et le dernier terme de S ; ainsi que le deuxième et le troisième et en appliquant le résultat précédent, on trouve :

$$S = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{20}\cos\frac{9\pi}{20}} - \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{20}\cos\frac{7\pi}{20}}$$

En transformant en sommes les dénominateurs par la formule :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

on trouve :

$$S = \frac{2}{\cos\frac{2\pi}{5}} - \frac{2}{\cos\frac{\pi}{5}}$$

En réduisant au même dénominateur et en transformant encore en somme le produit $\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}$, on trouve : $S=4$

VIII.-

1) Il existe un intervalle I de centre x_0 tel que pour tout x de $I-\{x_0\}$, $\sin x \neq \sin x_0$,

$$f(x) = \frac{\cos x - \cos x_0}{\sin x - \sin x_0}$$ est alors défini,

$$f(x) = \frac{-2\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}}{2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}} = -\operatorname{tg}\frac{x+x_0}{2}$$

Si $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$ $\quad \lim_{x\to x_0} f(x) = -\operatorname{tg} x_0.$

Si $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$.

2) On en déduit :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\sin x - 1} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \cos\frac{\pi}{4}}{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \quad (\text{d'après } 1°)$$

$$= -1.$$

3) $$\lim_{x \to \frac{5\pi}{6}} \frac{\cos x + \sqrt{3}\sin x}{x - \frac{5\pi}{6}} = \lim_{x \to \frac{5\pi}{6}} \frac{2\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)}{x - \frac{5\pi}{6}}$$

$$= \lim_{x \to \frac{5\pi}{6}} \frac{2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{x - \frac{5\pi}{6}}$$

$$= \lim_{x \to \frac{5\pi}{6}} \frac{2\sin\left(\pi - x - \frac{\pi}{6}\right)}{x - \frac{5\pi}{6}} = \lim_{x \to \frac{5\pi}{6}} \frac{-2\sin\left(x - \frac{5\pi}{6}\right)}{x - \frac{5\pi}{6}}$$

$$= -2 \quad \left(\text{car on sait que } \lim_{X \to 0} \frac{\sin X}{X} = 1\right).$$

4) Pour tout x n'annulant pas les dénominateurs,

$$f(x) = \frac{\cos^2 x - 3\cos x + 2}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{(\cos x - 1)(\cos x - 2)}{\operatorname{tg}^2 x}$$

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{tg} x}\right)^2 (2 - \cos x) \times \frac{1}{2}$$

on sait que $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$, $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

d'où, en appliquant les théorèmes sur les limites ; $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

IX.-

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

$\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ est défini pour $\cos x \neq -1$ c'est-à-dire

$$x \neq \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Pour $x \neq \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, on a :

$$-1 < \cos x \leq 1$$

donc $1 - \cos x \geq 0$ et $1 + \cos x > 0$

d'où $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \geq 0$

Par suite f est définie pour tout $x \neq \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Dans ces conditions, $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$

d'où $f(x) = \left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$

* $\forall x \in D_f$, $f(x+2\pi) = f(x)$, donc f est périodique de période 2π. Il en résulte qu'il suffit d'étudier et de construire la représentation graphique de f sur un intervalle d'amplitude 2π par exemple $[0, 2\pi]$ ou $[-\pi, \pi]$.

* $\forall x \in D_f$; $f(-x) = f(x)$, donc f est une fonction paire et il en résulte qu'il suffit d'étudier et de construire la représentation graphique de f sur $[0, \pi]$.

La fonction n'est pas définie pour $x = \pi$ et sur $[0, \pi[$ on peut écrire :

$$f(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \quad \text{(voir cours)}$$

x	0		π
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$	$+$	$\Vert$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$