Correction des exercices de la page 39 et 40 du livre

Prof. Mohamed El Merouani

I.-

- Sur $[-1, \frac{1}{6}[$ la fonction f est continue car c'est une fonction polynôme.
- Sur $[\frac{1}{6}, 1]$; $f(x) = \frac{6x+3}{2x+5}$ est bien définie et continue car c'est une fonction rationnelle (homographique).
- Continuité en $x_0 = \frac{1}{6}$:

$$\lim_{x \to \frac{1}{6}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{6}^-} 6x^2 + x + 1 = \frac{4}{3}$$

$$f(\frac{1}{6}) = \frac{3}{4}$$

Donc f n'est pas continue en $x_0 = \frac{1}{6}$

Un raisonnement analogue peut être fait dans le cas de la fonction g.
Elle est continue pour $x \neq 0$, d'abord parce que le rapport de deux fonctions continues ($x \mapsto 1 - \cos\sqrt{|x|}$ et $x \mapsto |x|$) est continue sur son domaine de définition. En plus, du fait que la composée des fonctions continues ($x \mapsto |x|$; $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \cos x$) est continue.
Pour la continuité en $x_0 = 0$, on a :

$$g(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos\sqrt{|x|}}{|x|} = \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$$

où on a fait le changement de variable $t = \sqrt{|x|}$ et on a utilisé la limite usuelle

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$$

Donc g n'est pas continue en $x_0 = 0$.
D'où, g est continue sur $[-1, 1] - \{0\}$.
II.-

1. f continue en $0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = a$

$$f(x) = \frac{x^2}{2 - \sqrt{4 + x^2}} = \frac{x^2(2 + \sqrt{4 + x^2})}{-x^2} = -(2 + \sqrt{4 + x^2})$$

D'où $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -4$

Donc f est continue en $0 \Leftrightarrow f(0) = -4$

$$\Leftrightarrow a = -4$$

2. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = ?$

$$f(x) = \frac{x^2}{2-\sqrt{4+x^2}} = \frac{x^2}{2-\sqrt{x^2\left(\frac{4}{x^2}+1\right)}} = \frac{x^2}{2-|x|\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}}$$

D'où $\forall x \in]-\infty, 0[; |x| = -x$

$$f(x) = \frac{x^2}{2+x\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}} = \frac{x}{\frac{2}{x}+\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}}$$

et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\frac{2}{x}+\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}} = -\infty$

III.- Pour $x \neq \pm 2$, la fonction f est continue comme rapport de deux fonctions continues qui sont $x \longmapsto 4-x^2$ et $x \longmapsto 3-\sqrt{x^2+5}$. Cette deuxième fonction est continue du fait que la composée de deux fonctions continues ($x \longmapsto x^2+5$ et $x \longmapsto \sqrt{x}$) est continue.
Pour que f soit continue en $x=2$ et en $x=-2$, il faut que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = k = \lim_{x\to -2} f(x) = f(-2)$$

$$\lim_{x\to\pm 2} f(x) = \lim_{x\to\pm 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$$

Le calcul directe de cette limite est une forme indéterminée (de type $\frac{0}{0}$). Pour enlever l'indétermination, on multiplie par le conjuguée du dinominateur de la fonction.

$$\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})} = \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-(x^2+5)}$$

$$= \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2} = 3+\sqrt{x^2+5}$$

Alors

$$\lim_{x\to\pm 2} f(x) = \lim_{x\to\pm 2} 3+\sqrt{x^2+5} = 6$$

Donc, pour que f soit continue en en $x=2$ et en $x=-2$, il faut que $k=6$.
IV.-

1. g n'est pas définie en 0.
   g est une fonction continue sur son domaine de définition.

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \sin x \cdot \sin\frac{1}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0 x\neq 0} \frac{\sin x}{x} \cdot x\sin\frac{1}{x}$$

   On sait que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

   et on a : $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$
   Donc $-x \leq x\sin\frac{1}{x} \leq x$ ou $x \leq x\sin\frac{1}{x} \leq -x$
   alors

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

d'où

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0$$

Donc, le prolongement par continuité de g est la fonction :

$$g_1(x) = \begin{cases} \sin x \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

V.- On considère la fonction $f : [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x^3 - 3x + 1$$

f est continue sur $[1, 2]$.

$$f(1) = -1 < 0$$

$$f(2) = 3 > 0$$

donc on a $f(1) < 0 < f(2)$
d'où 0 est une valeur intermédiaire.
D'près le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]1, 2[$ tel que $f(c) = 0$, c'est-à-dire $c^3 - 3c + 1 = 0$ (c est la solution cherchée).
VI.- Sur $[0, +\infty[$; $f(x) = x^3 + 3x - 1$

1.
$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} &= \frac{x_1^3 + 3x_1 - 1 - x_2^3 - 3x_2 + 1}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{x_1^3 - x_2^3 + 3(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} \end{aligned}$$

   or $x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)$
   d'où
$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} &= \frac{(x_1 - x_2)[x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + 3]}{x_1 - x_2} \\ &= x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + 3 > 0 \quad \text{si} \quad x_1 \neq x_2 \end{aligned}$$

2. On a
$$\frac{f(x_1 - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$
   d'où f est strictement croissante.
3. f est continue sur $[0, +\infty[$; (et f est strictement croissante).
$$f(0) = -1 < 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty > 0$$
   Donc on a : $f(0) < 0 < \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $f(c) = 0$ et ce c est unique car f est continue, strictement croissante, donc f est une bijection.