Année Universitaire: 2014-2015

Faculté Polydisciplinaire de Tétouan

Master Finance Islamique

M12 Modélisation Mathématique II:

-Méthodes de Prévision en Finance

Pr. Mohamed El Merouani
Département de Statistique et Informatique
e-mail: m_merouani@yahoo.fr
http://elmerouani.jimdo.com

Contenu:

- Chapitre 1: Processus Stochastiques
- Chapitre 2: Modèles linéaires
- Chapitre 3: Modèles non linéaires

Contenu: Processus Stochastiques

- Caractérisation des processus par
  - une distribution de probabilité
  - par les moments
- Processus stationnaires
- Processus ergodiques

Contenu: Modèles linéaires (de Box-Jenkins):

- Processus purement aléatoires,
- Rappels sur les opérateurs
- Les modèles AR (Processus **A**uto-**R**egressifs)
- Les modèles MA (Procesus de Moyennes Mobiles *(**M**oving-**A**verage))*
- Les modèles ARMA (et les processus obtenus comme combinaison de ces deux dérniers).

Contenu: Modèles non linéaires de la Finance

- Les modèles ARCH (Engle, 1982)

(**A**uto**R**egressive **C**onditionnal **H**eteroscedasticity)

- Les modèles GARCH (Bollerslev, 1986)

(**G**eneralized **A**uto**R**egressive **C**onditionnal **H**eteroscedasticity)

- Les modèles ARCH-M

(**A**uto**R**egressive **C**onditionnal **H**eteroscedasticity-in-**M**ean)

Logiciels pour analyser des séries temporelles:

- Eviews
- R
- SPSS
- SAS
- XLSTAT
- **NumXL**

Bibliographie

- Régis BOURBONNAIS, Michel TERRAZA: «Analyse des séries temporelles: Applications à l'économie et à la gestion», DUNOD, 2004.
- Sandrine LARDIC, Valérie MIGNON: «Économétrie des Séries Temporelles Macroéconomiques et Financières», Economica, 2002.

Chapitre 1: **Processus Stochastiques**

Introduction

- Un série temporelle ou chronologique est une suite d'observations d'un phénomène au cours du temps:

$$Y_t = D_t + N_t$$

- D_t composante déterministe
- **N_t composante aléatoire**

Introduction

- Un série temporelle ou chronologique peut avoir comme compositions:

$$Y_t = T_t C_t S_t \varepsilon_t \qquad \text{ou} \qquad Y_t = T_t + C_t + S_t + \varepsilon_t$$

- T_t tendance
- C_t le cycle ou la conjoncture
- S_t la saison ou la composante saisonnière
- **ε_t le résidus ou le facteur résiduel**

Processus Stochastiques:

- Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires qui correspondent à des instants successifs du temps.
- Il sera noté par: $Y(t,u)$

  où t est le temps et u est la variable aléatoire.
- Si on fixe $t=t_0$, alors $Y(t_0,u)$ sera une variable aléatoire.
- Mais, si on fixe $u=u_0$, alors pour chaque instant du temps, le processus prendra une seule valeur

$$Y(t,u_0)$$

Processus Stochastiques: distribution de probabilité

- Lorsque l'on fixe une valeur dans le temps, le processus stochastique devient une variable aléatoire qui aura sa propre distribution de probabilité.
- Ainsi, pour $t=t_i$, la distribution de probabilité sera notée par $F[Y(t_i)]$.

Processus Stochastiques: distribution de probabilité

- Si, au lieu d'une valeur, on fixe deux valeurs du temps, on obtiendra une variable bidimensionnelle avec une fonction de distribution bivariante. Ainsi pour $t=t_i$ et $t=t_j$, la distribution de pobabilité sera $F[Y(t_i), Y(t_j)]$.
- En général, pour un ensemble fini des valeurs du temps, on obtiendra une fonction de distribution conjointe. Ainsi, pour $t_1, t_2, t_3,\dots, t_n$ la fonction de distribution conjointe sera: $F[Y(t_1), Y(t_2),\dots, Y(t_n)]$.

Processus Stochastiques: distribution de probabilité

- De cette façon, on dit qu'un processus stochastique est parfaitement caractérisé lorsque l'on peut déterminer les fonctions de distribution conjointe pour chaque ensemble fini de variables du processus, c'est-à-dire pour chaque nombre fini "n" de variables aléatoires.
- La détermination des caractéristiques du processus à partir des fonctions de distribution est, en général, une méthode compliquée. Pour cela, on a l'habitude d'utiliser de préférence la méthode des moments.

Processus Stochastiques: caractérisation pas les moments

- Dans une distribution de probabilité, on peut calculer les moments de différents ordres, même si les moments de premier et de second ordre sont les plus utilisés.
- Pour un processus stochastique, que l'on note, pour simplifier la notation , Y_t, la moyenne ou le moment de premier ordre est défini de la forme suivante:

$$\mu_t = E(Y_t)$$

- L'indice t indique que la moyenne sera, en général, différente pour chaque période de temps.

Processus Stochastiques: caractérisation pas les moments

- Comme moments de second ordre par rapport à la moyenne, on considère en plus de la variance, les covariances entre les variables aux différents instants du temps ou autocovariances qui seront définies par:

$$\gamma_{t,s} = Cov(Y_t, Y_s) = E[(Y_t - \mu_t)(Y_s - \mu_s)]$$

lorsque $s=t$, on obtient la variance:

$$\gamma_{t,t} = Var(Y_t, Y_t) = E[(Y_t - \mu_t)^2]$$

Processus Stochastiques: caractérisation pas les moments

- Comme une manière alternative de caractérisation d'un processus stochastique, on utilise aussi les coefficients d'autocorrelation

$$R_{t,s} = \frac{Cov\left(Y_t \ , Y_s\right)}{\sqrt{Var\left(Y_t\right) \cdot Var\left(Y_s\right)}}$$

Remarques:

- Les autocorrelations et les variances ensemble donnent la même information que les autocovariances. Mais, il est préferable d'utiliser les autocorrelations puisqu'elles donnent des mesures relatives, mieux que les autocovariances qui sont affectées par l'échelle utilisée.
- La caractérisation d'un processus stochastique par les moments de premier et de second ordre est, en principe, plus incomplète que lorsqu'elle est faite par les fonctions de distribution.

- Mais si le processus est normal, il sera parfaitement caractérisé par ses deux premiers moments.
- Dans le context des processus stochastiques, comment se conceptualise une série temporelle?
- Même si, dans une série temporelle, on dispose d'une observation pour chaque période du temps, on l'obtient pas en général d'une forme déterministe comme dans le cas d'une fonction exacte du temps.

- Une série temporelle a, en général, un caractère aléatoire, et elle peut être considérée comme un échantillon de taille 1 pris dans des périodes successifs de temps á partir d'un processus aléatoire.

- Dans ce sens, une série temporelle sera considérée comme une réalisation aléatoire d'un processus stochastique.

- Mais, contrairement à l'echantillonnage aléatoire simple où chaque extraction est indépendante des autres, dans une série temporelle la donnée extraite pour une période concrète ne sera pas, en général, indépendante des données extraites pour des périodes antérieures.
- L'information utilisée en économie adopte, dans plusieures cas, la forme d'une série temporelle.

- Ainsi, les agregats de la Comptabilité Nationale, les séries monnaitaires de la Banque de Maroc, la série des Ventes d'une entreprise…etc. viennent sous forme des séries temporelles.

- En économie et, en général, dans les sciences sociales, l'information d'une série s'obtient par observation passive, c'est-à-dire, sans contrôle des facteurs qui influencent sur la variable objet d'étude.

- Par conséquent, même si on dispose d'une série très longue, on doit la considérer toute entière comme une seule réalisation d'un processus stochastique.

- Par exemple, si on considère un indice mensuel des prix à partir de 1800 jusqu'à l'actualité, il ne se sera pas raisonable de supposer qu'à partir d'une date déterminée, par exemple à partir de 1900, commence une seconde réalisation du processus stochastique puisque le context dans lequel se produit l'observation des prix au début du XIX^{ème} siècle est différente du correspondant au début de XX^{ème} siècle.

- Dû au caractère passif de la prise d'informations, en économie, en général, on dispose seulement d'une seule réalisation pour chaque processus stochastique.
- Si, on dispose de n données, alors on doit estimer n moyennes et n variances, sans compter les autocovariances qui sont aussi indisponsables pour caractériser le processus. Autrement dit, le problème est très compliqué.

- Pour pouvoir, à partir d'une seule réalisation, faire inférence sur un processus stochastique, il faut imposer des restrictions à ce drenier. Les restrictions imposer habituellement sont qu'il soit "stationnaire" et "érgodique".

Processus stationnaires :

Pour définir un processus stationnaire, on peut utiliser, comme on l'a fait pour sa cactérisation, soit les fonctions de distribution ou alternativement les moments.

Processus stationnaires:

- On dit qu'un processus stochastique est stationnaire, **au sens strict ou stationnarité forte**, lorsque l'on réalise un même déplacement dans le temps de toutes les variables de n'importe quelle distribution conjointe finie, cette distribution ne varie pas.
- Considérons la fonction de distribution conjointe $F(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_k})$.
- Si on suppose que l'on déplace tous les éléments de cette distribution de m périodes, la nouvelle fonction de distribution conjointe sera $F(Y_{t_1+m}, Y_{t_2+m}, \ldots, Y_{t_k+m})$.

Processus stationnaires:

- Si le processus est stationnaire, **au sens strict**, on vérifie que:

  $F(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_k}) = F(Y_{t_1+m}, Y_{t_2+m}, \ldots, Y_{t_k+m})$.

  et de même, on doit obtenir un résultat analogue pour n'importe quelle autre distribution conjointe finie.
- Aussi dans ce cas, il est plus difficil d'analyser un processus stationnaire à partir des fonctions de distribution que de le faire à partir des moments.

Processus stationnaires:

- En utilisant les moments, un processus est dit stationnaire de **premier ordre**, ou **en moyenne**, s'il vérifie:

$$E[Y_t] = \mu \qquad \forall t$$

- Par conséquent, dans un processus stationnaire en moyenne, l'espérance mathématique, ou la moyenne théorique, reste constante dans le temps.

Processus stationnaires:

- On dit qu'un processus est stationnaire de **second ordre (ou au sens large)** lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées:

1. La variance est finie et reste constante dans le temps, c'est-à-dire: $E[Y_t - \mu]^2 = \sigma^2 < \infty \qquad \forall t$
2. L'autocovariance entre deux périodes distinctes de temps dépend uniquement de l'intervalle du temps entre ces deux périodes. C'est-à-dire:

$$E[(Y_{t+k} - \mu)(Y_t - \mu)] = \gamma_k \qquad \forall t$$

est l'autocovariance d'ordre k, où k est la longueur de cet intervalle de temps entre Y_t et Y_{t+k}.
Sa valeur γ_k est indépendante de l'instant t du temps que l'on considère.

Remarques:

- Comme on peut remarquer, la variance du processus est tout simplement l'autocovariance d'ordre 0.

- Lors de la définition d'un processus stationnaire au sens large, implicitement, on tient compte de que le processus est aussi stationnaire en moyenne, puisque soit dans la variance soit dans les autocovariances, le symbole μ n'est affecté par aucun indice.

Remarques:

- Si un processus est stationnaire au sens strict, il sera aussi stationnaire au sens large, mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie, puisque le processus peut ne pas être stationnaire pour les moments d'ordre supérieures au second.
- Aussi, ici, si le processus est stationnaire au sens large, et en plus il est normal, on vérifie que le processus est stationnaire au sens strict.

- Lorsque le processus est stationnaire, en principe, on peut estimer les paramètres $\mu, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ à partir d'une seule réalisation.
- Considérant un échantillon $Y_1, Y_2, \ldots, Y_T$, on peut utiliser les estimateurs suivants:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t \qquad \hat{\gamma}_0 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t - \hat{\mu}\right)^2$$

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-k}\left(Y_{t+k} - \hat{\mu}\right)\left(Y_t - \hat{\mu}\right)$$

- Évidement, lorsque *k* croît, on dispose de moins d'observations pour calculer $\hat{\gamma}_k$. Ainsi, pour $\hat{\gamma}_{T-1}$ on disposera seulement d'une seule observation.

Corrélogramme:

Pour un processus stationnaire les autocorrelations sont définies de la forme suivante:

$$R_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \qquad k \geq 0$$

et comme $E\left[(Y_{t+k} - \mu)(Y_t - \mu)\right] = \gamma_k \qquad \forall t \geq 0$

on vérifie que $\gamma_k = \gamma_{-k}$,
et par conséquent

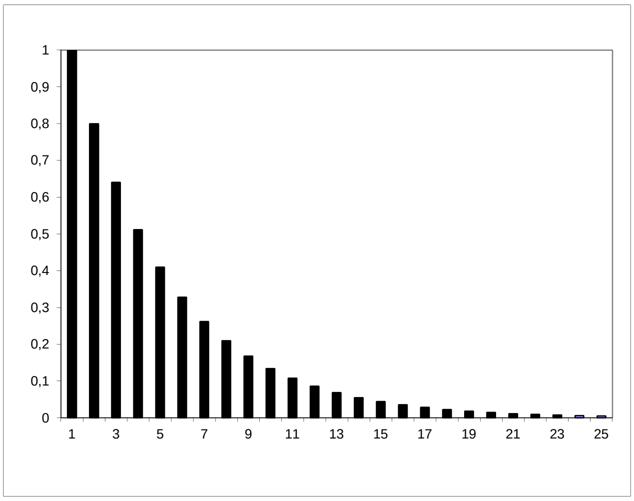
$$R_k = R_{-k}$$

Corrélogramme:

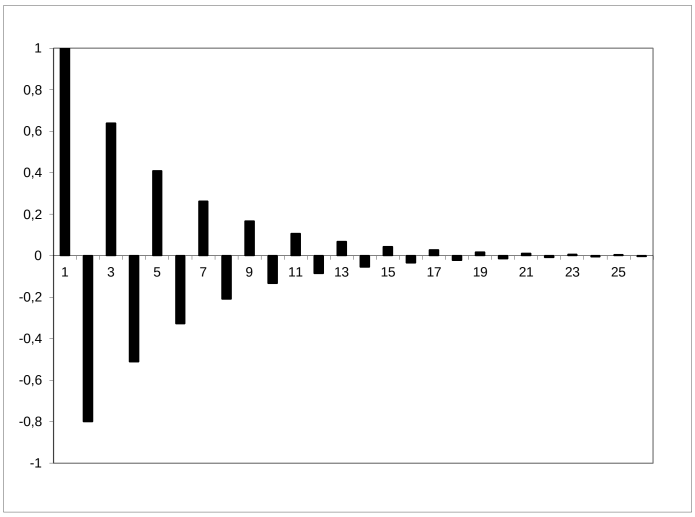
- La representation graphique de R_k pour $k=0,1,2,3,\ldots$ s'appelle Corrélogramme.
- L'examen du Corrélogramme des données observées permettra de repérer l'existence d'autocorrélations éventuelles ainsi que l'ordre d'autocorrélation le plus significatif.

Étude graphique de la stationnarité à partir du Corrélogramme:

- Si toutes les auto-corrélations sont significativement différentes de zéro et diminuent très lentement, alors ceci indique que la série temporelle est non-stationnaire.
- Il est ensuite nécessaire de vérifier cette intuition en appliquant des tests statistiques de stationnarité et/ou de non stationnarité.



Pr. Mohamed El Merouani 37



Pr. Mohamed El Merouani 38

Processus érgodiques:

- En plus d’être stationnaire, il est nécessaire que le processus stochastique a la propriété d’ergodicité, pour que l’inférence peut se réaliser d’une forme adéquate.
- Le concept d’ergodicité sera examiné d’une forme intuitive. Lorsqu’il y a une forte corrélation entre les valeurs d’une série temporelle éloignées dans le temps, c’est-à-dire R_k garde des valeurs très élevées pour un k assez grand, il arrive que lorsque on augmente la taille de l’échantillon, il y a peu d’information nouvelle qui s’ajoute.

Processus érgodiques:

- La conséquence de ce fait est que l’augmentation de la taille de l’échantillon n’aura pas d’utilité, puisqu’il faudra calculer un nombre élevé d’autocovariances pour bien caractériser le processus.
- Lorsque la propriété d’ergodicité est vérifiée, on peut caractériser le processus par ses moments de premier et de second ordre.

Processus érgodiques:

- Une condition nécessaire, mais pas suffisante de l'érgodicité est:

$$\lim_{k \to \infty} R_k = 0$$

- Lorsqu'un processus est stationnaire –et aussi érgodique- tout le problème de l'inférence se simplifie d'une façon remarquable.
- **Maintenant, on peut poser cette question: Est-il raisonable de supposer les séries économiques sont générées par des processus stochastiques stationnaires?**

Réponse:

- En général, on peut affirmer que les séries économiques ne sont pas stationnaires. On peut penser, par exemple, au PIB, l'indice des prix, l'offre monnaitaire…etc.
- Après avoir examiner cette situation, on peut conclure immédiatement que l'utilisation des processus stochastiques stationnaires en économie est peu intéressante. Mais, en réalité, c'est pas le cas, parce que par de simples transformations la plus part des séries économiques peuvent se convertir en des séries approximativement stationnaires. Alors, il sera facil d'appliquer l'inférence statistique à ces processus.

Pourquoi des séries sont non stationnaires?

- La première série non stationnaire à laquelle on pense est celle qui est croissante dans le temps.
- Une série saisonnière est également non stationnaire puisque la valeur espérée dépend du temps dans la période de la saison.
- Une série dont la dispersion varie dans le temps n'est pas stationnaire.

Comment rendre une série stationnaire?

- En fait, en prenant une série brutalement, on a fort peu de chances pour qu'elle soit stationnaire.
- La transformation par le Logarithme permet d'éviter le problème de qu'une série ait une dispersion qui varie dans le temps.
- Comme on peut aussi utiliser les techniques de lissage de la série.