Université Abdelmalek Essaâdi
ENSA de Tétouan

Année universitaire : 2014/2015
Première année de cycle ingénieur

T.D. de Probabilités et Statistiques
Série n° 3

Exercice 1 :
On procède à n expériences indépendantes dans chacune d'elles l'événement A apparaît avec une probabilité p.
Dresser le tableau de la loi de de la variable aléatoire X, nombre des réalisations de l'événement $\overline{A}$ contraire de A dans n expériences, et trouver son espérance mathématique et sa variance.

Exercice 2 :
Une cellule d'ordinateur a enregistré un nombre binaire de rang n, dont chaque signe prend indépendamment des autres et avec la même probabilité la valeur 0 ou 1. La variable aléatoire X est le nombre de signes "1" dans l'écriture du nombre binaire.
Trouver la probabilité des événements $\{X = m\}$; $\{X \geqslant m\}$ et $\{X < m\}$.

Exercice 3 :
Par une voie de communication on transmet k messages contenant respectivement $n_1, n_2, \cdots, n_k$ signes binaires ("0" ou "1"). Les signes prennent indépendamment l'un ou l'autre et avec une probabilité $\frac{1}{2}$ les valeurs 0 ou 1. Chaque signe est perturbé (c'est-à-dire remplacé par le signe opposé) avec une probabilité p. Pour le codage on emploie un code qui corrige les erreurs d'un ou de deux signes (pratiquement avec une ceritude totale). Après la correction, la présence d'une erreure ne serait-ce que dans un signe rend tout le message erroné.
Trouver la probabilité P pour que ne serait-ce qu'un des k messages soit erroné.

Exercice 4 :
En théorie de la fiabilité des dispositifs techniques on recourt souvent en tant que loi de répartition de la durée du service sans aléas à la loi de Weibull de fonction de répartition

$$F(x) = 1 - e^{-\beta x^{\alpha}}; (x \geqslant 0),$$

où $\beta > 0$ est une certaine constante ; α, un nombre entier positif.
Trouver

1. la densité $f(x)$,
2. l'espérance mathématique et la variance.

Exercice 5 :
Soient deux variables aléatoires indépendantes X et Y. La variable aléatoire X est répartie selon une loi normale de paramètres $\mu = 0$ et $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$. La répartition de la variable aléatoire Y est uniforme dans l'intervalle $(0, 1)$.
Écrire les expréssions de la densité conjointe $f(x, y)$ et de la fonction de répartition $F(x, y)$ du couple aléatoire (X, Y).

Exercice 6 :
Démontrer que si la répartition d'une variable aléatoire X est binomile de paramètres n et p, son espérance mathématique est $E(X) = np$, et sa variance $Var(X) = npq$, avec $q = 1 - p$.

Exercice 7 :
Démontrer que pour n expériences indépendantes dans lesquelles l'événement A se réalise avec des probabilités $p_1, p_2, \cdots, p_n$, l'espérance mathématique est $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i$, et sa variance $Var(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i$, avec $q_i = 1 - p_i$.

Exercice 8 :
Démontrer que l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X suivant une loi hypergéométrique de paramètres n, a et b sont égales respectivement à

$$E(X) = \frac{na}{a+b};$$

$$Var(X) = \frac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$$

Exercice 9 :
Une urne contient 5 boules blanches et 7 noires ; on en tire à la fois 6 boules. La variable aléatoire X est le nombre de boules noires parmi celles qui ont été tirées.
Trouver l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X.

Exercice 10 :
On procède à plusieurs expériences indépendantes dans chacune desquelles l'événement A se produit avec une probabilité p. Les expériences sont poursuivies tant que l'événement A apparaît k fois, après quoi elles cessent. La variable aléatoire X est le nombre d'expériences qu'il faut réaliser.
Trouver son espérance mathématique, sa variance et son écart-type.

Exercice 11 :
Le montage d'une installation à fiabilité accrue se fait avec k pièces homogènes de haute qualité. Avant d'être présentée au montage, chaque pièces subit des essais de toute sorte et indépendamment des autres s'avère de haute qualité avec une probabilité p. Une fois que k pièces de haute qualité sont sélectionnées, les essais de nouvelles pièces cessent. La reserve des pièces est pratiquement illimitée.
Trouver l'espérance mathématique μ_X et la variance σ_X^2 de la variable aléatoire X (nombre de pièces mises à l'essai).

Exercice 12 :
En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev majorer la probabilité pour que la variable aléatoire X d'espérance mathématique μ et d'écart-type σ s'écarte de μ à moins de 3σ.

Exercice 13 :
On réalise un grand nombre n d'expériences indépendantes dans chacune desquelles la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $(1, 2)$.
On considère la variable aléatoire $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ moyenne arithmétique des valeurs observées de la variable aléatoire X.
Sur la base de la loi des grands nombres établir de quel nombre a s'approche (converge en probabilités) la variable Y lorsque $n \longrightarrow \infty$.
Évaluer l'erreur maximale pratiquement possible de l'égalité $Y \approx a$.